

Variables aleatorias, distribuciones de probabilidad & rol en Ing.

Juliana Quintana-Rojas

Departamento de Ingeniería Industrial

Universidad de Los Andes

Variables Aleatorias

Describen fenómenos cuyos valores exactos no se pueden predecir con total certeza

DISCRETAS

Toman un número
finito o contable
de valores

CONTINUAS

Pueden tomar
cualquier valor en
un intervalo/rango

V.A. Discretas

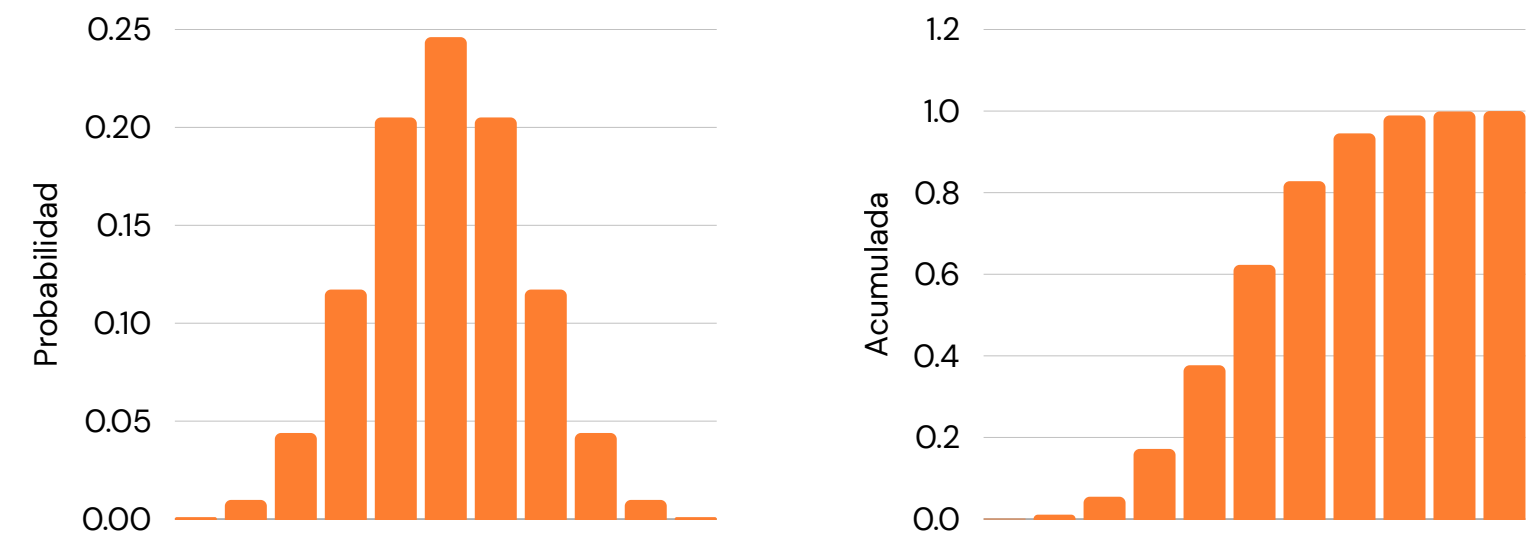
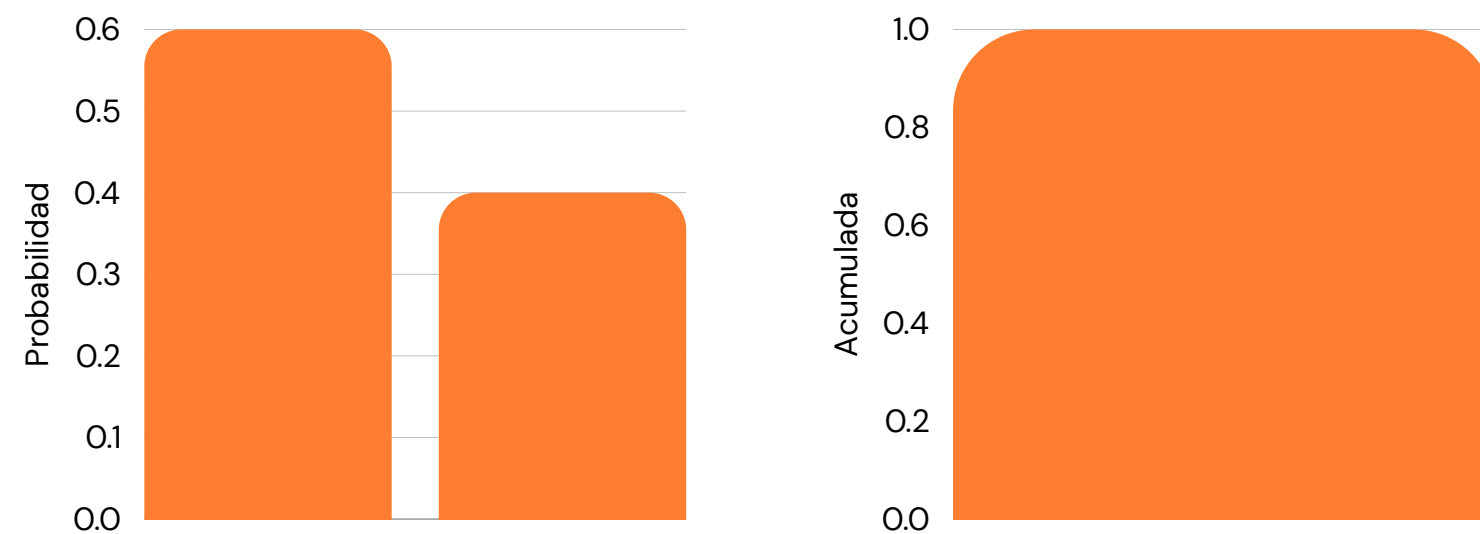
X es finito y puede tomar valores de la siguiente manera $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. En donde, cada posible valor de x_i puede:

Ensayo de Bernoulli

X es el resultado en un único experimento con dos posibles resultados (Éxito o fracaso)

Distribución binomial

X es el número de éxitos en n experimentos independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada intento.



Ensayo de Bernoulli

X es el resultado en un único experimento con dos posibles resultados (Éxito o fracaso)

Distribución binomial

X es el número de éxitos en n experimentos independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada intento.

Ej. Ensayo de Bernoulli

En un estudio médico, se ha determinado que la probabilidad de que un sujeto responda positivamente a un tratamiento específico es de $p=0.25$.

Define la variable aleatoria X (donde 1 es "responde" y 0 "no responde") y calcula su media y su varianza

UN SOLO ENSAYO
DE
ÉXITO/FRACASO

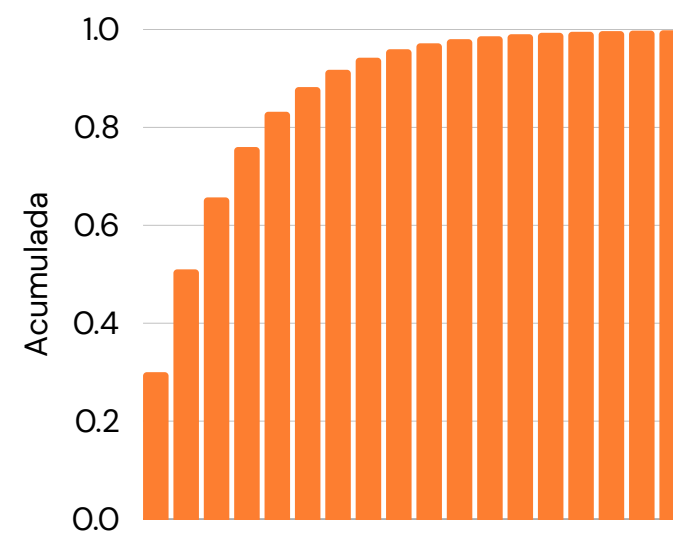
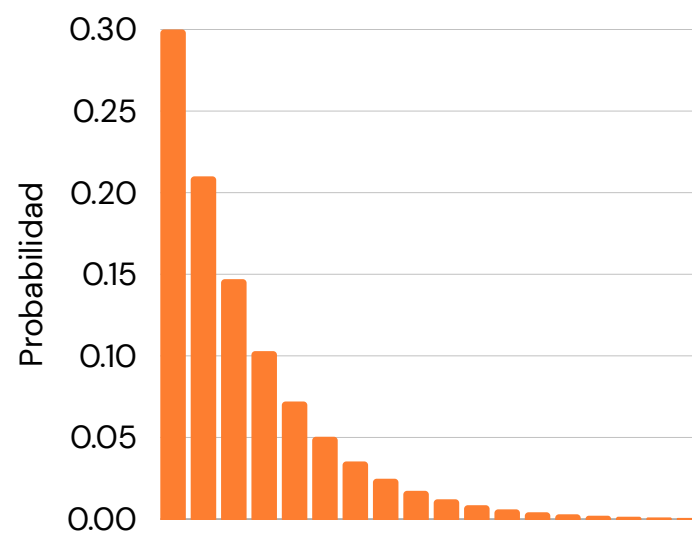
Ej. Distribución binomial

Supongamos que la probabilidad de que un estudiante de ciencias obtenga su grado es $p=0.4$. Si tomamos un grupo de $n=5$ estudiantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno obtenga el grado?

TOTAL DE ÉXITOS
EN N INTENTOS

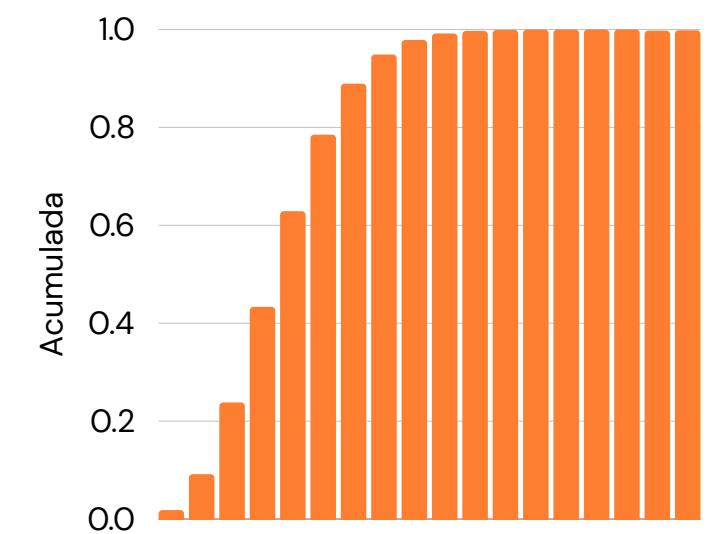
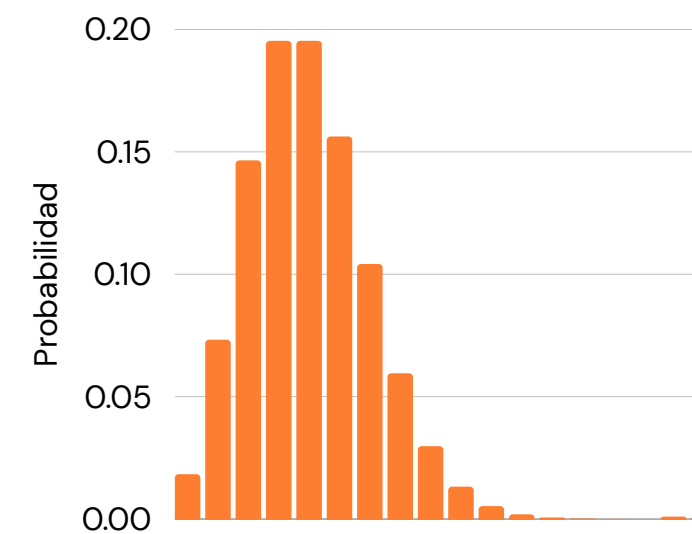
Distribución Geométrica

X es el número de intentos hasta el primer éxito asumiendo experimentos independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada uno.



Distribución Poisson

Probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.



Distribución Geométrica

X es el número de intentos hasta el primer éxito asumiendo experimentos independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada uno.

Distribución Poisson

Probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

Ej. Distribución Geométrica

En una línea de ensamblaje, el 60% de las impresoras son aceptables ($p=0.6$) y el 40% son rechazadas. Se realiza una inspección una por una. Calcula la probabilidad de que la primera impresora aceptable sea la tercera que se inspecciona

INTENTOS HASTA
EL PRIMER ÉXITO

Ej. Distribución Poisson

Los clientes llegan a una instalación de servicio a una tasa promedio de $\lambda=8$ clientes por hora. Calcula la probabilidad de que lleguen al menos tres clientes en una hora determinada

EVENTOS EN UN
INTERVALO DE
TIEMPO/ESPACIO

V.A. Continuas

X puede tomar cualquier valor en un intervalo y se describen por medio de una **función de densidad de probabilidad (PDF)**

Área bajo la curva de la $f(x)$ representa la probabilidad total y debe sumar 1

X, Y, Z denotan la variable aleatoria, mientras que x, y, z corresponden a los valores que puede tomar dicha VA

Función de Distribución Acumulada (CFD)

$F(x)$ mide la probabilidad que una variable aleatoria X no tome un valor superior a un numero x .

Dist. Uniforme

Def. Se caracteriza por tener una densidad constante en un intervalo cerrado $[a,b]$.

Es el modelo más simple para representar una variable aleatoria de la que solo se conoce su rango

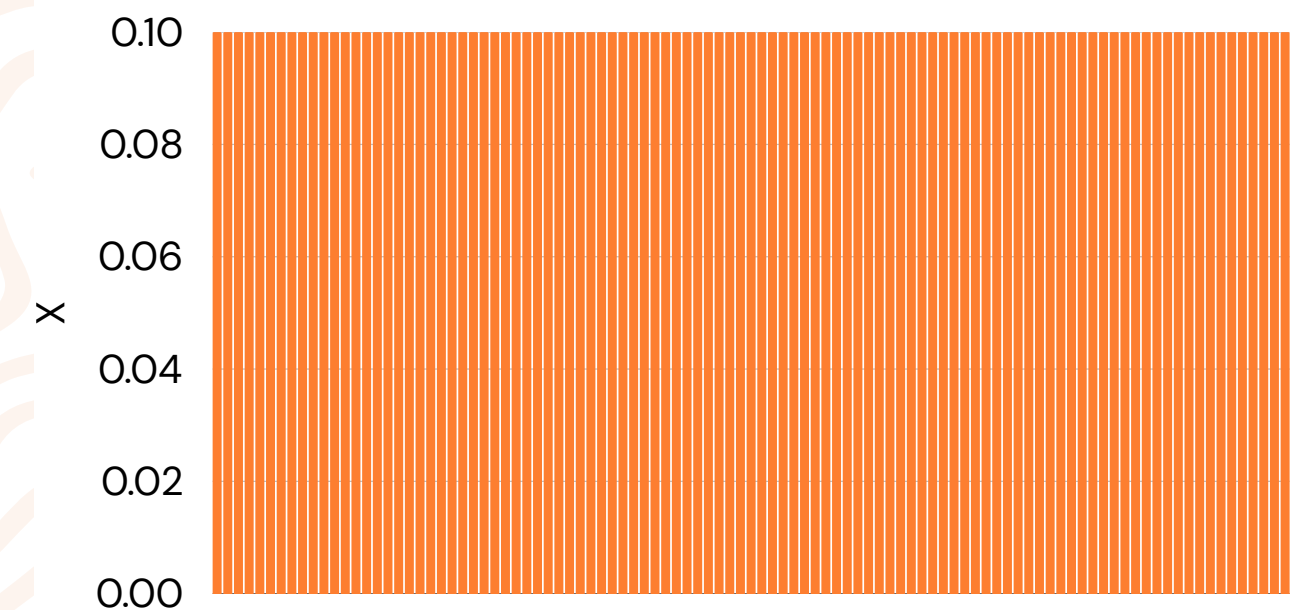
Propiedades

Media (μ).

Varianza (σ^2).

Aplicaciones en ingeniería

- Se utiliza como modelo inicial cuando no hay datos suficientes sobre la probabilidad de los valores, asumiendo que todos son igualmente probables dentro del rango
- Es fundamental en simulación para generar números aleatorios $U(0,1)$ que sirven de base para otras distribuciones



Dist. Uniforme

El volumen anual de ventas de un almacén varía aleatoriamente entre 380 y 1200 miles de euros.
¿Cuál es la probabilidad de que las ventas superen los 1000 miles de euros?

Dist. Exponencial

Def. Modela el tiempo entre eventos independientes que ocurren a una tasa constante (λ)

Propiedades

Media (μ).

Varianza (σ^2).

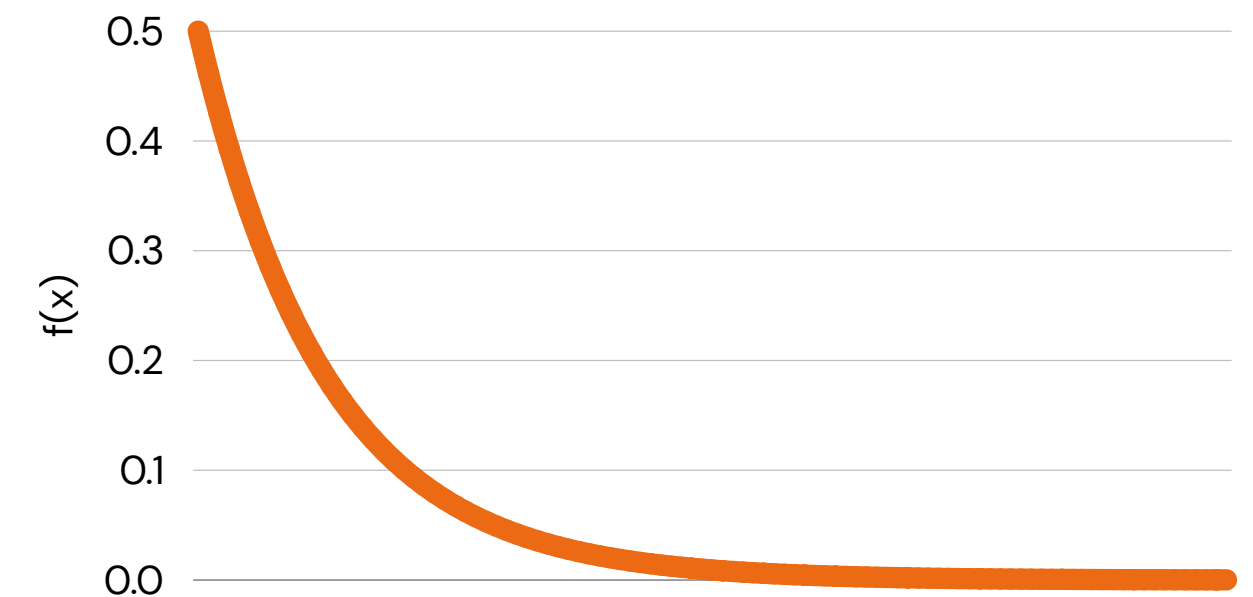
Falta de memoria

El tiempo transcurrido no afecta la probabilidad futura

Un componente usado es "tan bueno como uno nuevo"

Aplicaciones en ingeniería

- Común para modelar tiempos entre llegadas a sistemas de colas o el tiempo hasta la falla de componentes electrónicos que no sufren desgaste gradual



Dist. Exponencial

Una lámpara industrial tiene una tasa de falla de $\lambda=1/3$ (una falla cada 3000 horas). ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de su vida media de 3000 horas?

Dist. Gamma

Def. Es una generalización de la exponencial; modela el tiempo hasta que ocurren α eventos independientes

Propiedades

Parametros

- α (forma)
- β (escala)

Media (μ)

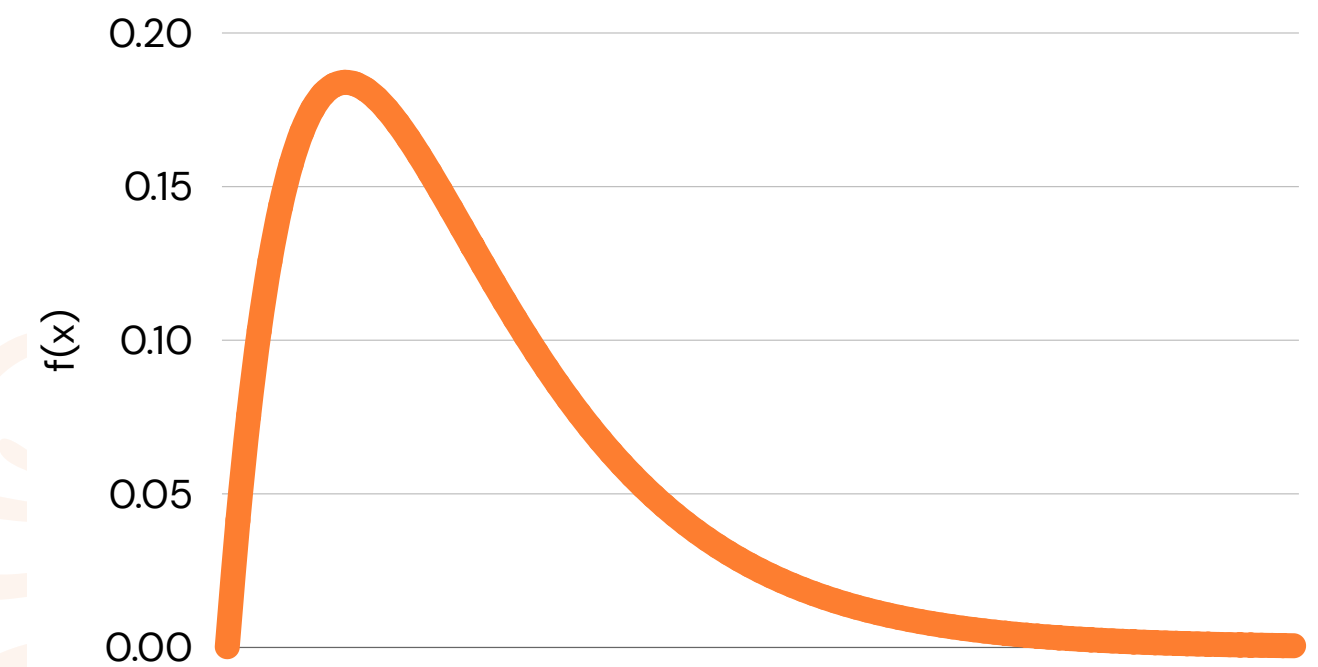
Varianza (σ^2)

Erlang

Cuando α es un entero positivo, se denomina distribución de Erlang

Aplicaciones en ingeniería

- Modela el tiempo para completar tareas complejas (como reparación de máquinas) o sistemas con redundancia pasiva (standby), donde un componente empieza a funcionar cuando falla el anterior



Dist. Gamma

La demanda diaria de arroz en una tienda sigue una distribución Gamma con $\alpha=3$ y $\beta=1/2$ (en miles de kg). Determinar la probabilidad de que la demanda exceda los 5000 kg en un día dado

Dist. Weibull

Def. Distribución extremadamente flexible utilizada para modelar una gran variedad de fenómenos mediante el ajuste de sus parámetros

Propiedades

Parametros

- α (escala)
- β (forma)

Exponencial

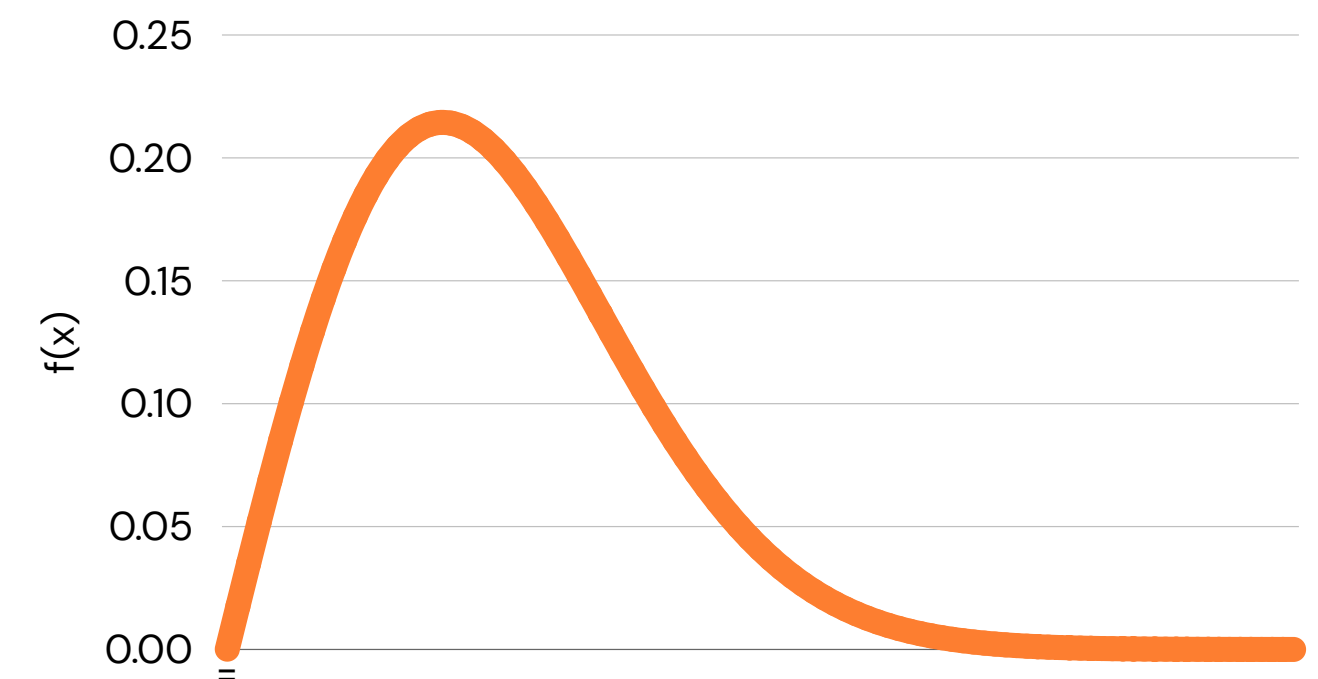
Cuando $\beta = 1$

Media (μ)

Varianza (σ^2)

Aplicaciones en ingeniería

- Principalmente en fiabilidad y mantenimiento para modelar el tiempo hasta la falla de equipos mecánicos o discos duros



Dist. Weibull

El tiempo que le toma a un avión en aterrizar y salir de la pista en un aeropuerto internacional de gran dimensión sigue una distribución de Weibull con **$v = 1.34$ minutos, $\beta = 0.5$ y $\alpha = 0.04$ minutos.** Calcule la probabilidad de que un avión tome más de 1.5 minutos para aterrizar y salir de la pista.

Dist. Normal

Def. La famosa "campana de Gauss", simétrica respecto a su media

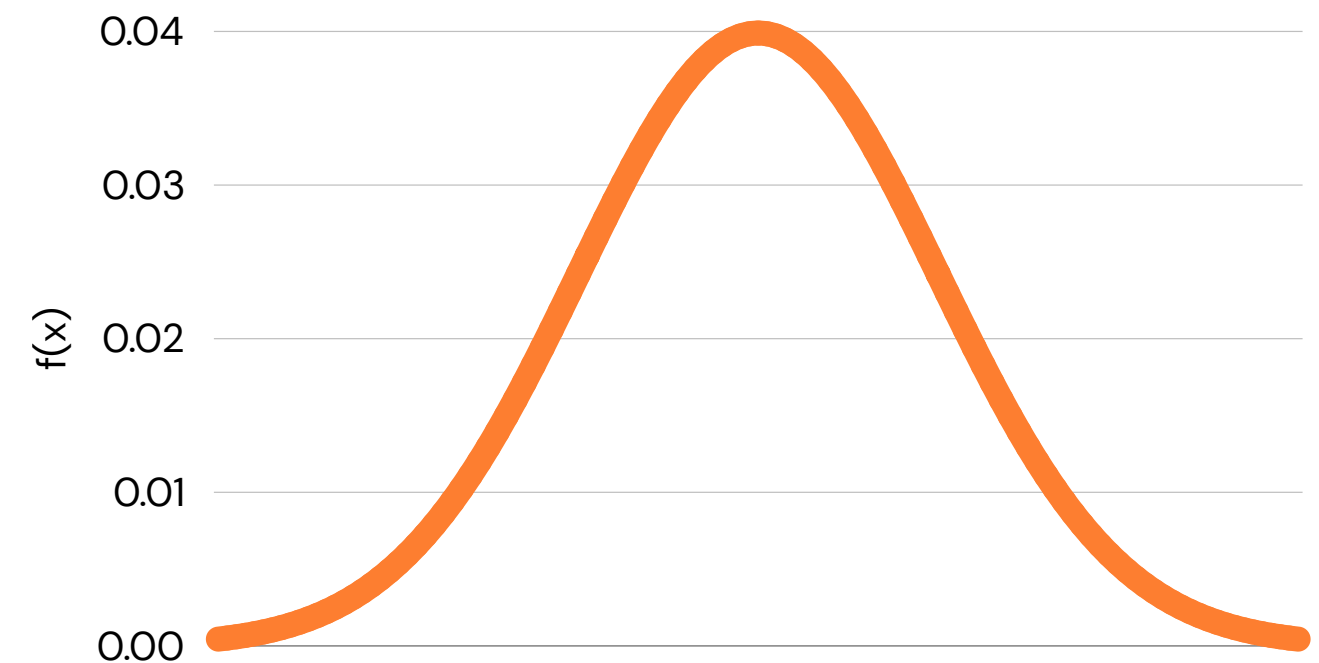
Propiedades

Media, mediana y moda son iguales (μ).

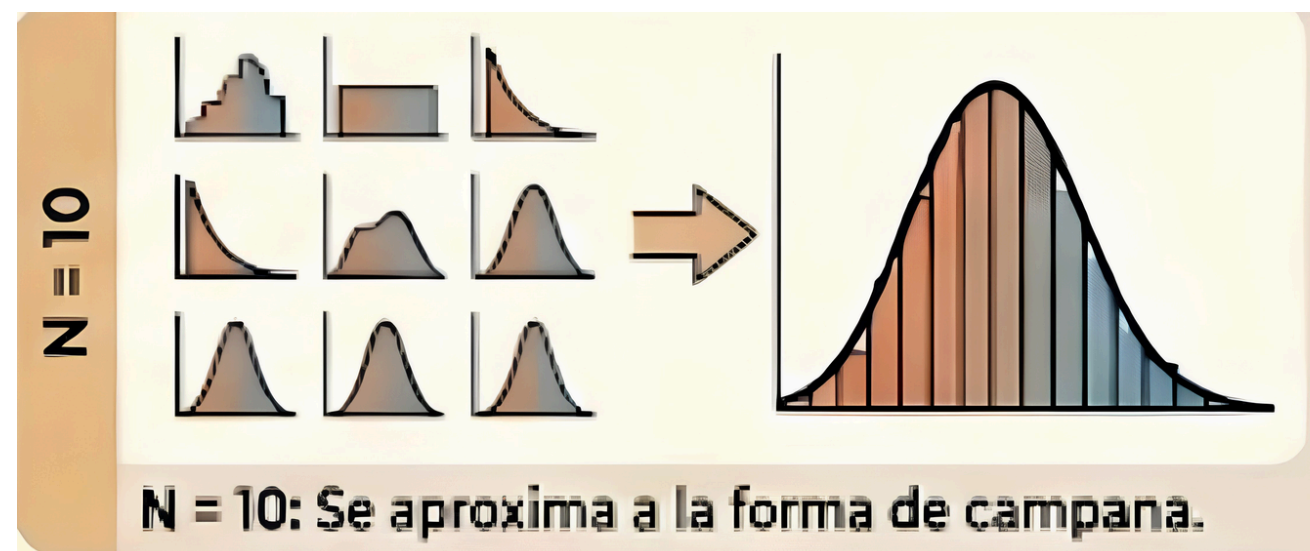
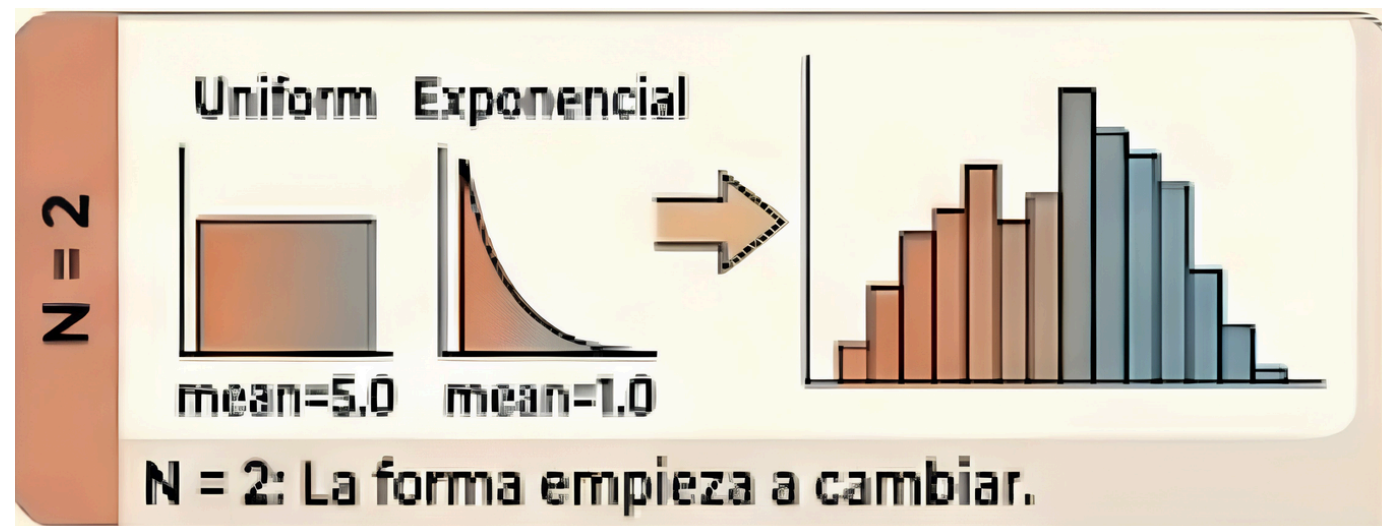
Dispersión es la desviación ($\sqrt{\sigma^2}$).

Aplicaciones en ingeniería

- Modela procesos que resultan de la suma de múltiples componentes, como errores de medición, tiempos de ensamblaje complejos o variaciones en piezas fabricadas



Dist. Normal (TLC)



Teorema del Límite Central (TLC)

Es fundamental en ingeniería porque establece que la suma de muchas variables aleatorias independientes tiende a seguir una **distribución normal**, sin importar la distribución original de las variables

soooooon...

Dist. Normal

El peso de los paquetes de un laboratorio sigue una distribución $N(1.8, 0.5)$ kg. ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete pese entre 1 y 2 kg?

Dist. Normal estándar

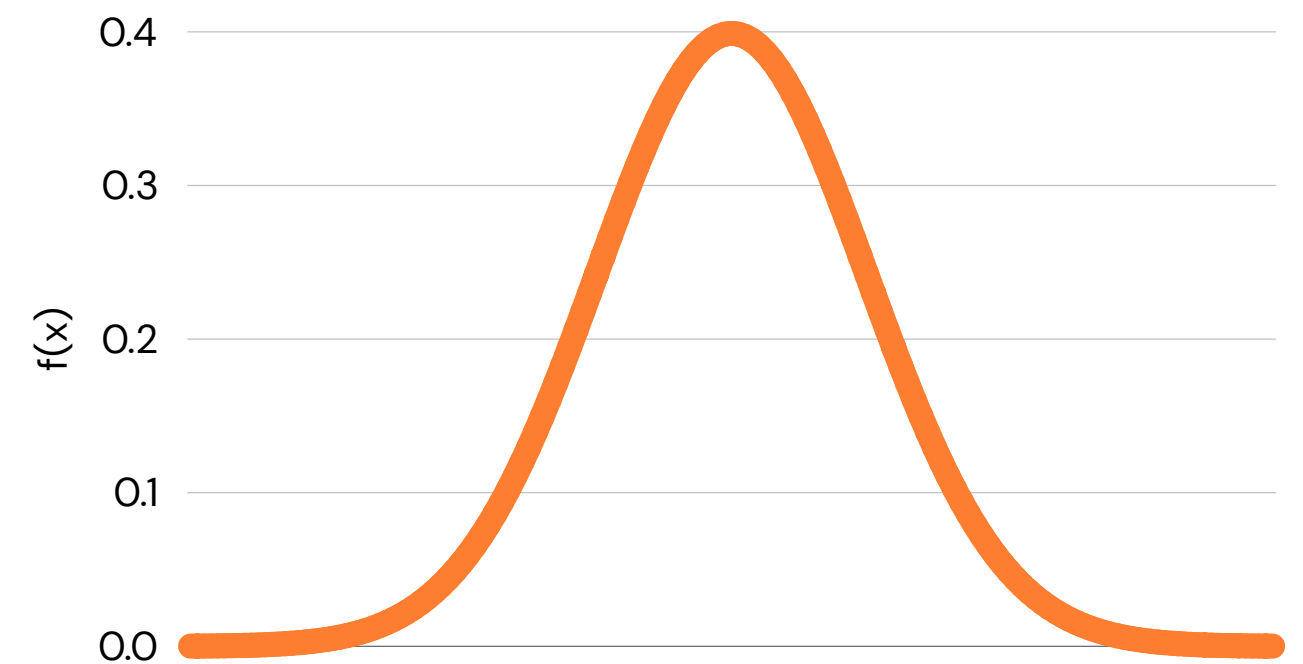
Def. Caso especial de la Normal donde $\mu=0$ y $\sigma=1$

Propiedades

Permite el uso de tablas estadísticas para cualquier distribución normal mediante la transformación

Aplicaciones en ingeniería

- Es la base para realizar inferencias estadísticas y cálculos de intervalos de confianza en cualquier fenómeno modelado como normal



Dist. Normal estándar

El peso de los paquetes de un laboratorio sigue una distribución $N(1.8, 0.5)$ kg. ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete pese entre 1 y 2 kg?

Dist. Lognormal

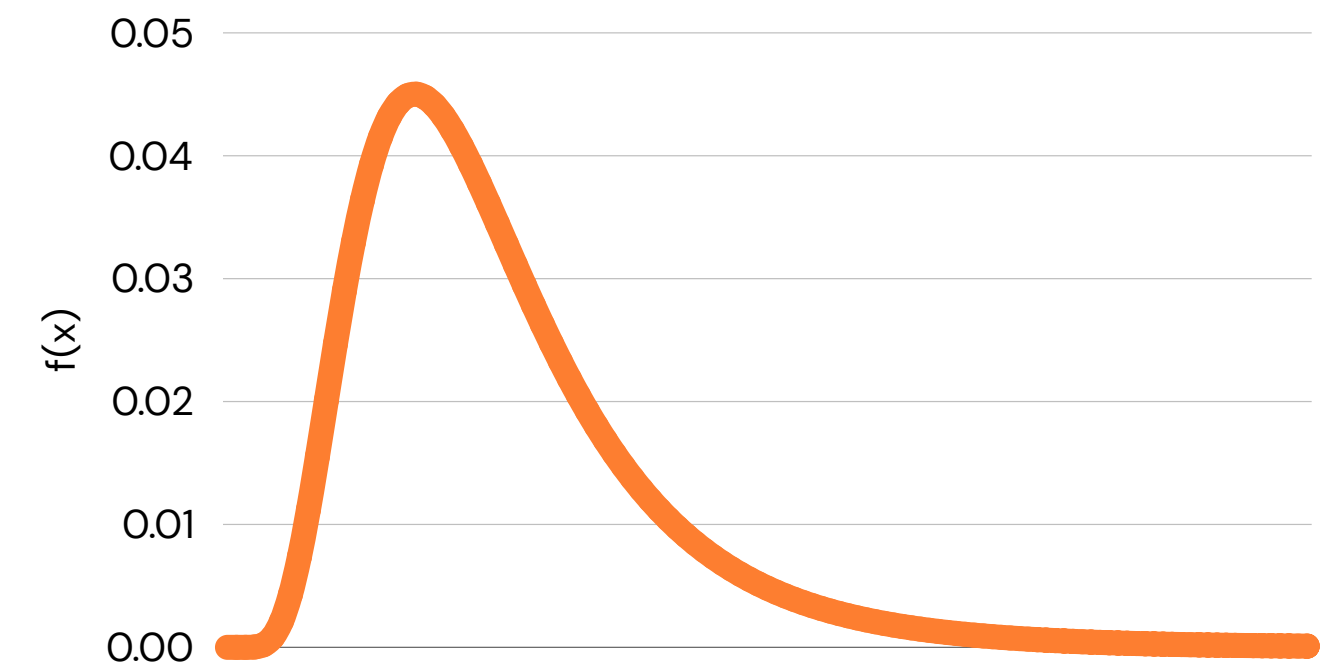
Def. Distribución de una variable cuyo logaritmo sigue una distribución normal

Propiedades

Es asimétrica hacia la derecha y solo toma valores positivos

Aplicaciones en ingeniería

- Modela procesos que son el producto de varios componentes, como el retorno de inversiones con interés compuesto o el tiempo hasta la falla de ciertos materiales bajo estrés



Dist. Lognormal

La tasa de retorno de una inversión volátil se modela como lognormal con media 20% y desviación estándar 5%. Calcula los parámetros μ y σ^2 de la distribución normal asociada poder simular este sistema.

Dist. Beta

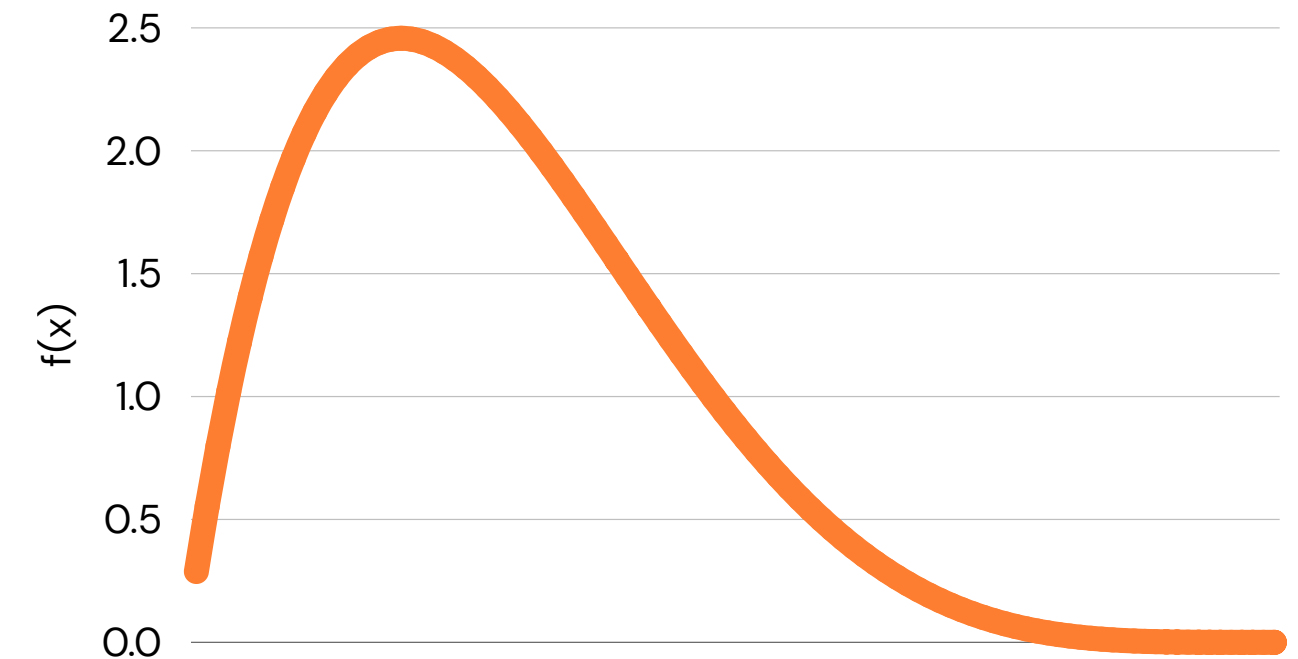
Def. Distribución extremadamente flexible acotada a un límite superior e inferior. Puede ser trasladada del 0, por medio de la adición de una constante y puede darle un rango mayor a $[0,1]$ si se multiplica el rango por una constante

Propiedades

Muy flexible para representar proporciones; si ambos parámetros de forma son 1, se convierte en la Uniforme $(0,1)$

Aplicaciones en ingeniería

- Útil para modelar proporciones de defectos en un lote o el tiempo para completar tareas en redes PERT cuando hay límites fijos de tiempo



Dist. Beta

Supongamos que el tiempo para completar una tarea de ingeniería sigue una distribución Beta en el intervalo con parámetros $\alpha_1=1.47$ y $\alpha_2=2.16$. Si en la vida real la tarea tiene un tiempo mínimo de inicio de -10 minutos y un máximo de 20 minutos, ¿cómo transformarías los valores generados por la distribución Beta al intervalo $[-10,20]$?

Dist. Triangular

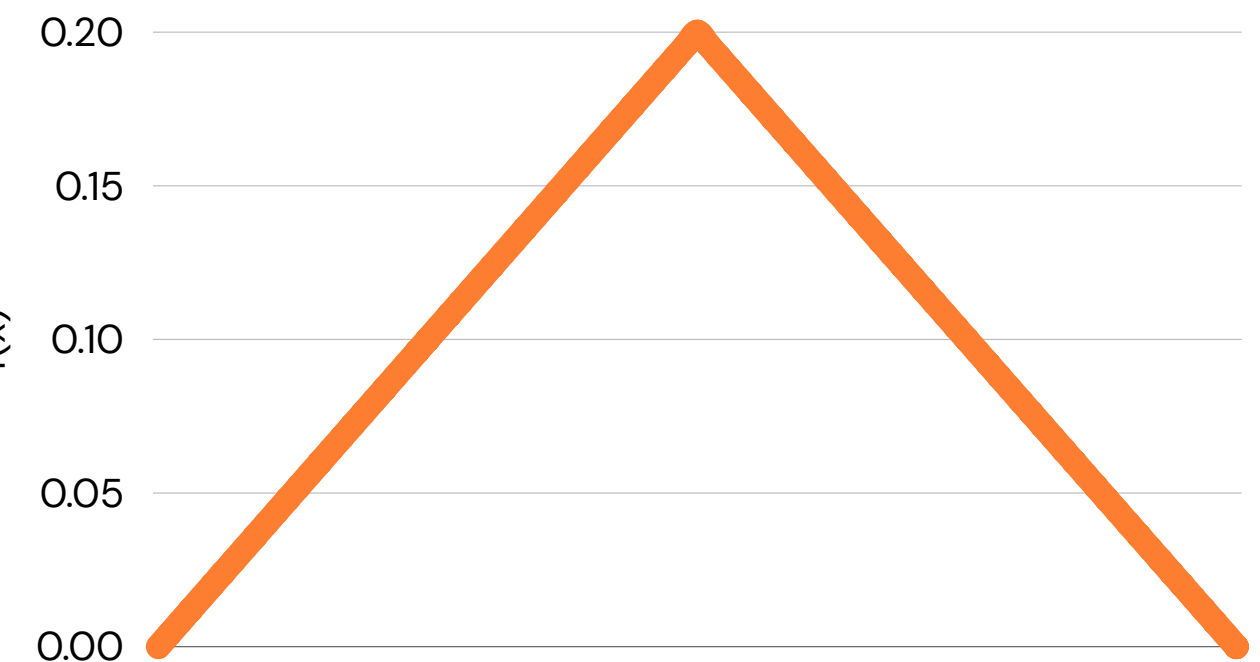
Def. Modela procesos basándose solo en los valores mínimo (a), máximo (b) y más probable (m)

Propiedades

Su densidad forma un triángulo. La media es la suma de los tres parámetros dividida por tres

Aplicaciones en ingeniería

- Se usa frecuentemente en ausencia de datos históricos, basándose en estimaciones subjetivas de expertos. Es una mejora sobre la uniforme al incluir el valor más probable



Dist. Triangular

Un proceso de ensamblaje tiene un rango de 10 a 25 segundos y una mediana de 15 segundos.
Calcular el valor modal del tiempo de ensamblaje

Relaciones matemáticas entre VA

La distribución de la suma de variables independientes se determina mediante la convolución de sus funciones de densidad o masa

Σ Normales

La suma de variables normales independientes es también una variable normal

Σ Poisson

La suma de variables de Poisson independientes sigue siendo una distribución de Poisson

Σ Exponenciales

La suma de n variables exponenciales independientes e idénticas resulta en una distribución de Erlang de orden n

Relación Beta-Gamma

Una variable con distribución **Beta** se puede obtener a partir de dos variables **Gamma independientes** (Y_1, Y_2) mediante la relación $X = Y_1 / (Y_1 + Y_2)$

Relaciones entre variables

- **$X \sim \text{Binomial}(1, p)$ es la distribución Bernoulli(p).**
- $\text{Exp}(\beta)$ y $\text{Weibull}(1, \beta)$ son la misma distribución.
- **$\text{Exp}(\beta)$ y $\text{Gamma}(1, \beta)$ son la misma distribución.**
- $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$ si y solo si $X^\alpha \sim \text{Exp}(\beta\alpha)$.
- **$U(0,1)$ y $\text{Beta}(1,1)$ son la misma distribución.**
- $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ si y solo si $1-X \sim \text{Beta}(\beta, \alpha)$.
- $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ es la suma de n variables independientes Bernoulli(p).
- $X \sim \text{Erlang}(k, \beta)$ (o $\text{Gamma}(k, \beta)$ con k entero) es la suma de k variables independientes $\text{Exp}(\beta)$.
- $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ si y solo si $(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$ (Normal Estándar).
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si y solo si $e^X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$.
- **$X \sim \text{Geometrico}(p)$ es la distribución Binomial Negativa(1, p).**
- $X \sim \text{Binomial Negativa}(s, p)$ es la suma de s variables independientes Geometrico(p).
- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ describe el número de eventos en un intervalo si el tiempo entre ellos es $\text{Exp}(1/\lambda)$.