

Variables aleatorias, distribuciones de probabilidad & rol en Ing.

Juliana Quintana-Rojas
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

Variables Aleatorias

Describen fenómenos cuyos valores exactos no se pueden predecir con total certeza

DISCRETAS

Toman un número
finito o contable
de valores

CONTINUAS

Pueden tomar
cualquier valor en
un intervalo/rango

V.A. Discretas

X es finito y puede tomar valores de la siguiente manera $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. En donde, cada posible valor de x_i puede:

$$P(x_i) = P(X = x_i)$$

$$P(x_i) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

↳ Función de probabilidad de masa

X → variable · mayúscula
 x → valores que puede tomar
 x → minúscula.

$(x_i, P(x_i))$ → parejas / tuplas
 ↳ python
 ↳ distribución probabilidad x

Ensayo de Bernoulli

X es el resultado en un único experimento con dos posibles resultados (Éxito o fracaso)

$$p(x) = \begin{cases} 1-p & \rightarrow \text{probabilidad éxito} \rightarrow x=0 \\ p & \rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$E(X) = p$$

$$\text{Var}(X) = p(1-p) \quad \rightarrow \text{prob}$$

Distribución binomial

X es el número de éxitos en n experimentos independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada intento.

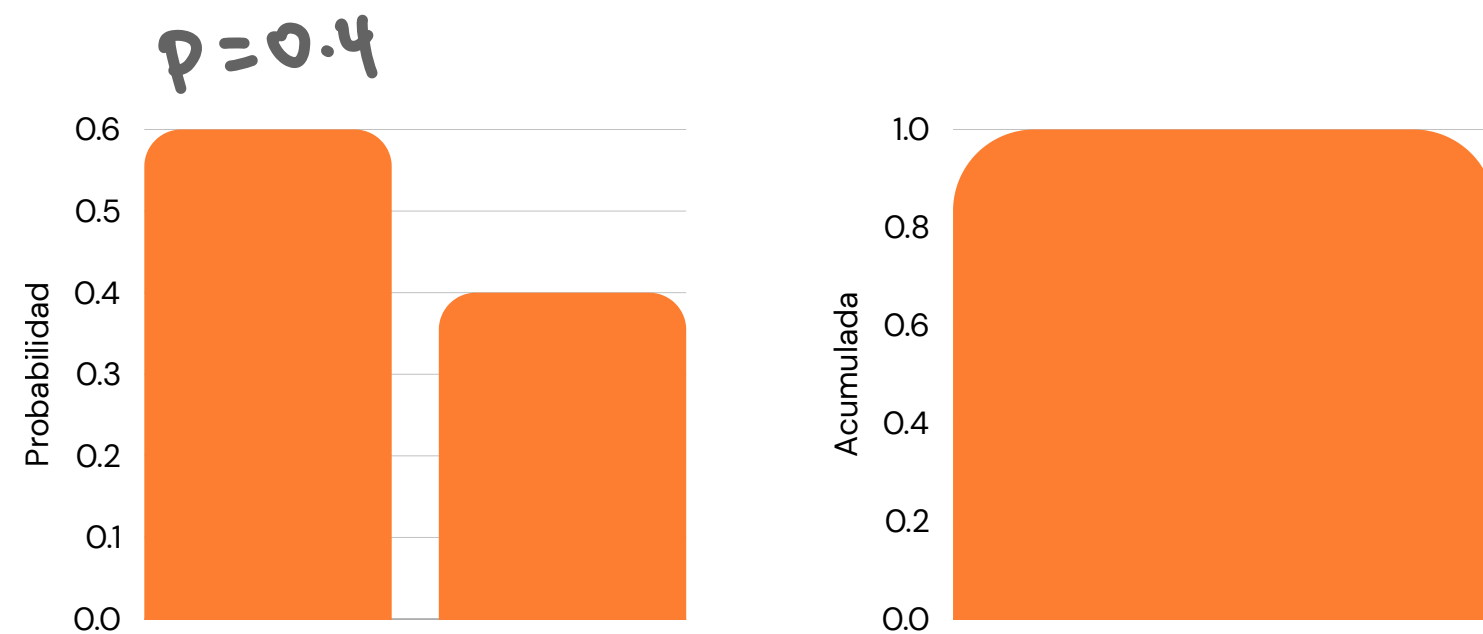
$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

$$E(X) = np \quad \rightarrow \text{\# intentos}$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) \quad \rightarrow \text{probabilidad éxito}$$

Ensayo de Bernoulli

X es el resultado en un único experimento con dos posibles resultados (Éxito o fracaso)

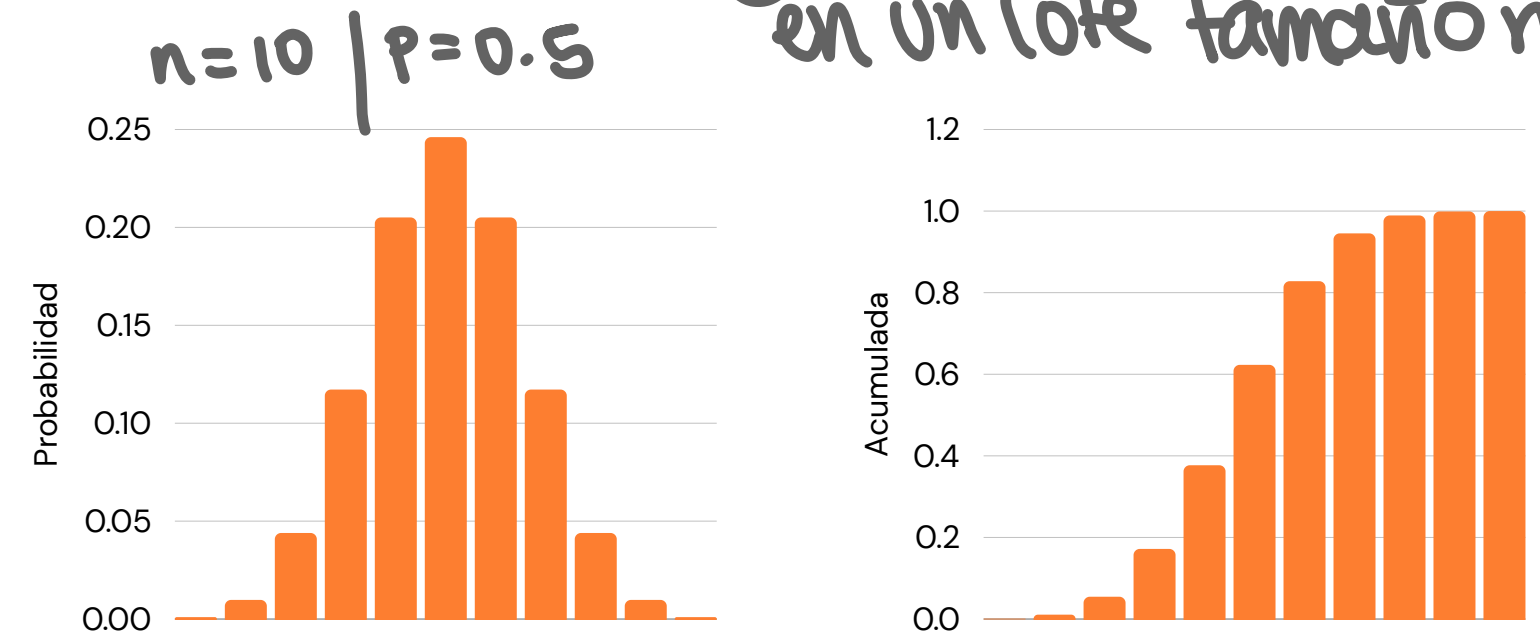


Ej

- ① lanzamiento de una moneda
- ② resultados médicos: cáncer / no cáncer

Distribución binomial

X es el número de éxitos en n experimentos independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada intento. ① # unidades defectuosas en un lote tamaño n



- ② # unidades demandadas en un inventario

Ej. Ensayo de Bernoulli

En un estudio médico, se ha determinado que la probabilidad de que un sujeto responda positivamente a un tratamiento específico es de $p=0.25$.

Define la variable aleatoria X (donde 1 es "responde" y 0 "no responde") y calcula su media y su varianza

$p=0.25 \rightarrow$ probabilidad éxito

$$p(x) = \begin{cases} 1-0.25 & x=0 \\ 0.25 & x=1 \end{cases} = \begin{cases} 0.75 & x=0 \\ 0.25 & x=1 \end{cases}$$

$$E(X) = p = \underline{0.25}$$

$$\text{Var}(X) = p(1-p) = 0.25(0.75) = \underline{0.24375}$$



UN SOLO ENSAYO
DE
ÉXITO/FRACASO

Ej. Distribución binomial

Supongamos que la probabilidad de que un estudiante de ciencias obtenga su grado es $p=0.4$. Si tomamos un grupo de $n=5$ estudiantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno obtenga el grado?

$p=0.4 \rightarrow$ éxito

$n=5 \rightarrow$ experimentos

$$P(X=x) = \text{binomial}(x, n; p)$$

$$P(X=0) = \text{binomial}(0; 5; 0.4)$$

↓
Ninguno obtenga el grado

$$\begin{aligned}
 P(X) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= \binom{5}{0} 0.4^0 (1-0.4)^{5-0} = 0.6^5 \\
 &= \underline{\underline{0.778}}
 \end{aligned}$$

TOTAL DE ÉXITOS
EN N INTENTOS

Distribución Geométrica

X es el número de intentos hasta el primer éxito asumiendo experimentos independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada uno.

$$P(X) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p & x=1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

$$E(X) = 1/p$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Distribución Poisson

Probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

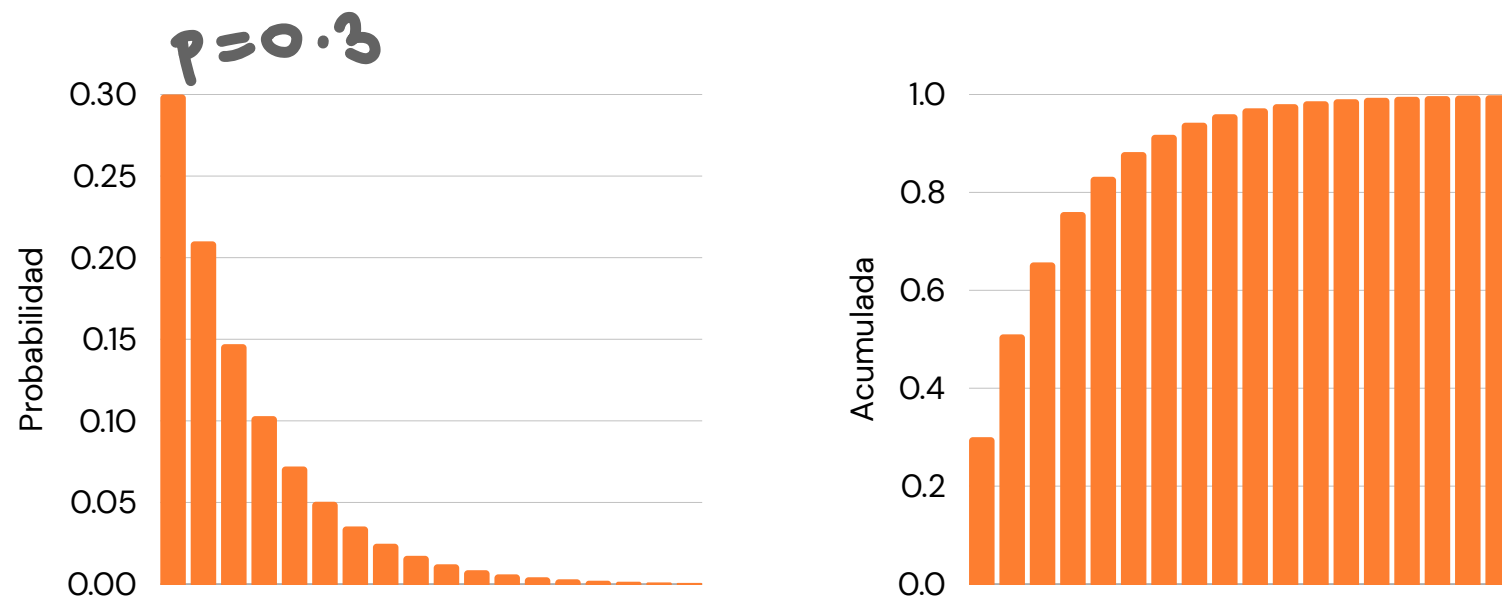
$$P(X, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$\left. \begin{array}{l} E(X) = \lambda \\ \text{Var}(X) = \lambda \end{array} \right\} E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$$

λ : # esperado de ocurrencia del evento durante intervalo dado
↳ tiempo específico

Distribución Geométrica

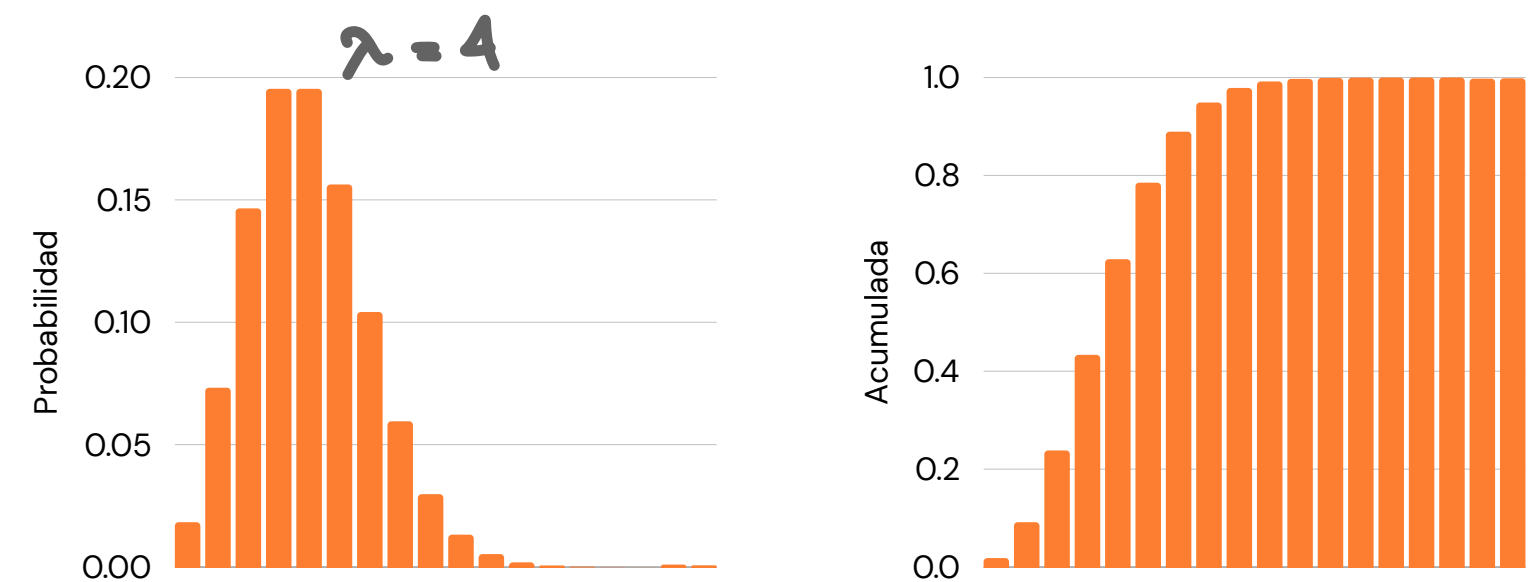
X es el número de intentos hasta el primer éxito asumiendo experimentos independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada uno.



- ① # piezas inspeccionadas hasta la 1ª defectuosa
 ② Tiempos entre ocurrencia de eventos en t discreto

Distribución Poisson

Probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo. *volumen / área*



- ① # llegadas x hora
 ② concentración $\times \text{cm}^3$
 ③ # pallets $\times \text{km}^2$

Ej. Distribución Geométrica

En una línea de ensamblaje, el 60% de las impresoras son aceptables ($p=0.6$) y el 40% son rechazadas. Se realiza una inspección una por una. Calcula la probabilidad de que la primera impresora aceptable sea la tercera que se inspecciona

Imp Aceptables = 0.6
 Imp Rechazados = 0.4

1 aceptable $\rightarrow$ 3 inspecciona
 $\hookrightarrow$ 2 fallas anteriores

$$P(X) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p & x=1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

$$P(X=3) = \text{geométrica}(3, 0.6)$$

$$\begin{aligned}
 P(X=3) &= (1-0.6)^{3-1} \cdot 0.6 = (0.4^2)(0.6) \\
 &= \underline{\underline{0.096}}
 \end{aligned}$$

INTENTOS HASTA
 EL PRIMER ÉXITO

$$P(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

Ej. Distribución Poisson

Los clientes llegan a una instalación de servicio a una tasa promedio de $\lambda=8$ clientes por hora. Calcula la probabilidad de que lleguen al menos tres clientes en una hora determinada

$X \geq 3 \rightarrow$ Al menos 3 clientes

0.986 Al menos $\geq$ | exactamente =

$$* P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1 - 0.013 = \underline{0.986}$$

$$P(X=3) = \frac{e^{-8} \cdot 8^3}{3!} = \underline{0.028}$$

$$* P(0;8) = \frac{e^{-8} \cdot 8^0}{0!}$$

$$* P(1;8) = \frac{e^{-8} \cdot 8^1}{1!}$$

$$* P(2;8) = \frac{e^{-8} \cdot 8^2}{2!} \left\{ \begin{array}{l} = e^{-8} \left(\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!} \right) \\ = 0.013 \end{array} \right.$$

No son iguales

EVENTOS EN UN
INTERVALO DE
TIEMPO/ESPACIO

V.A. Continuas

X puede tomar cualquier valor en un intervalo y se describen por medio de una **función de densidad de probabilidad (PDF)** $\rightarrow f(x)$

Área bajo la curva de la $f(x)$ representa la probabilidad total y debe sumar 1

$$f(x) \geq 0; \forall x \in \text{rango } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \rightarrow \text{Área bajo la curva}$$



X,Y,Z denotan la variable aleatoria, mientras que x,y,z corresponden a los valores que puede tomar dicha VA

Función de Distribución Acumulada (CFD)

$F(x)$ mide la probabilidad que una variable aleatoria X no tome un valor superior a un número x .

$$\forall x \text{ con } -\infty < x < \infty$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \rightarrow \uparrow$$


 Función Acumulada.

Dist. Uniforme

Def. Se caracteriza por tener una densidad constante en un intervalo cerrado $[a,b]$.

Es el modelo más simple para representar una variable aleatoria de la que solo se conoce su rango

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

Propiedades

Media (μ).

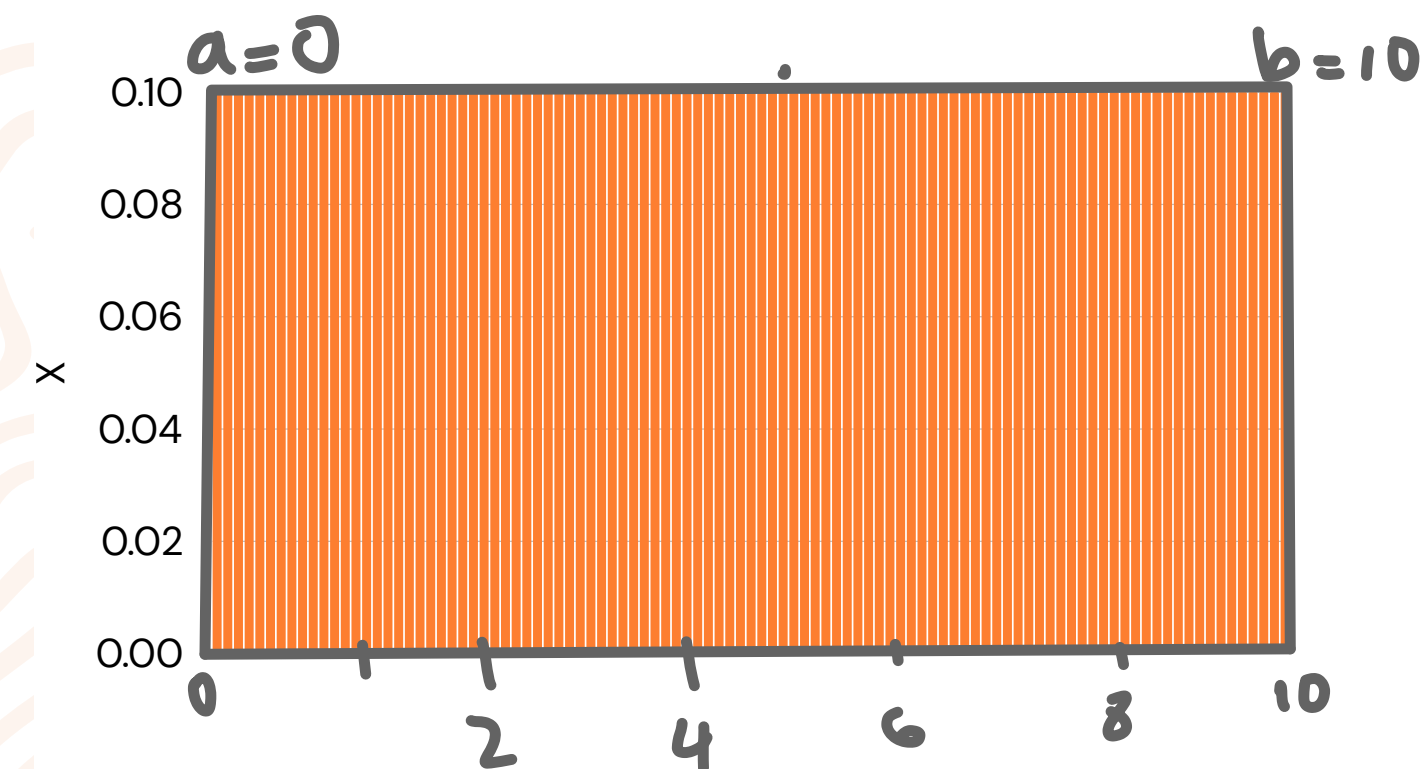
$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

Varianza (σ^2).

$$\text{Var} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Aplicaciones en ingeniería

- Se utiliza como modelo inicial cuando no hay datos suficientes sobre la probabilidad de los valores, asumiendo que todos son igualmente probables dentro del rango
- Es fundamental en simulación para generar números aleatorios $U(0,1)$ que sirven de base para otras distribuciones



Dist. Uniforme

El volumen anual de ventas de un almacén varía aleatoriamente entre 380 y 1200 miles de euros.
¿Cuál es la probabilidad de que las ventas superen los 1000 miles de euros?

$$a = 380 \text{ miles } \text{€}$$

$$b = 1200 \text{ miles } \text{€}$$

$$P(X > 1000) = 1 - F(X=1000).$$

$$= 1 - \int_a^b f(x) dx = 1 - \int_{380}^{1200} \frac{1}{b-a} dx$$

$$= 1 - \left. \frac{x-a}{b-a} \right|_{380}^{1200} = 1 - \frac{1000 - 380}{1200 - 380}$$

$$= 0.756$$

$$P(X > 1000) = 1 - 0.756 = \underline{\underline{0.244}}$$

después

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Dist. Exponencial

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Def. Modela el tiempo entre eventos independientes que ocurren a una tasa constante (λ)

Propiedades

Media (μ).

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza (σ^2).

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Falta de memoria

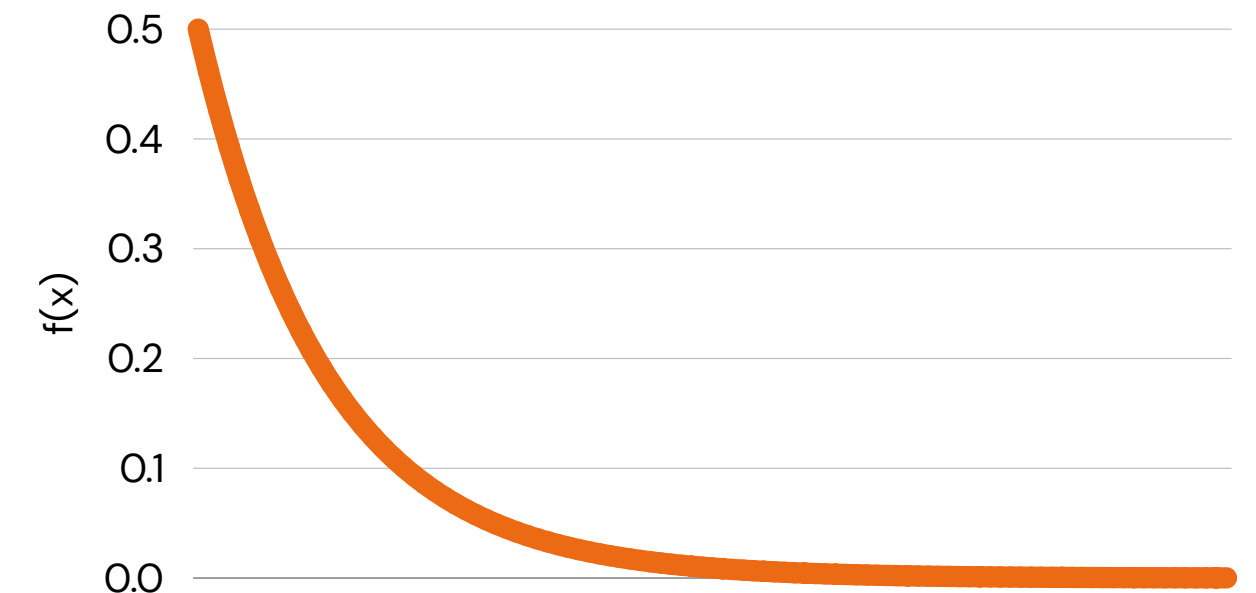
El tiempo transcurrido no afecta la probabilidad futura

Un componente usado es "tan bueno como uno nuevo"

$$P(X > s+t | X > s) = P(X > t) \quad \forall s, t \geq 0$$

Aplicaciones en ingeniería

- Común para modelar tiempos entre llegadas a sistemas de colas o el tiempo hasta la falla de componentes electrónicos que no sufren desgaste gradual



Dist. Exponencial

cola derecha

Una lámpara industrial tiene una tasa de falla de $\lambda=1/3$ (una falla cada 3000 horas). ¿Cuál es la probabilidad de que dure **más de su vida media** de 3000 horas?

$P(X > 3000) \rightarrow$ Dure más que su vida media. $\neq P(X = 3000)$

por enunciado

$$P(X > 3) = \int_3^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x}$$

$$P(X > 3) = e^{-\frac{1}{3}(3)} = e^{-1} = \underline{\underline{0.368}}$$

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \geq 0$$

$$F(x) = e^{-\lambda x}$$

Dist. Gamma

Def. Es una generalización de la exponencial; modela el tiempo hasta que ocurren α eventos independientes

Propiedades

Parametros

- α (forma)
- β (escala)

$$K = \alpha$$

$$\theta = \beta$$

Media (μ)

$$\mu = \alpha \cdot \beta$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

Erlang

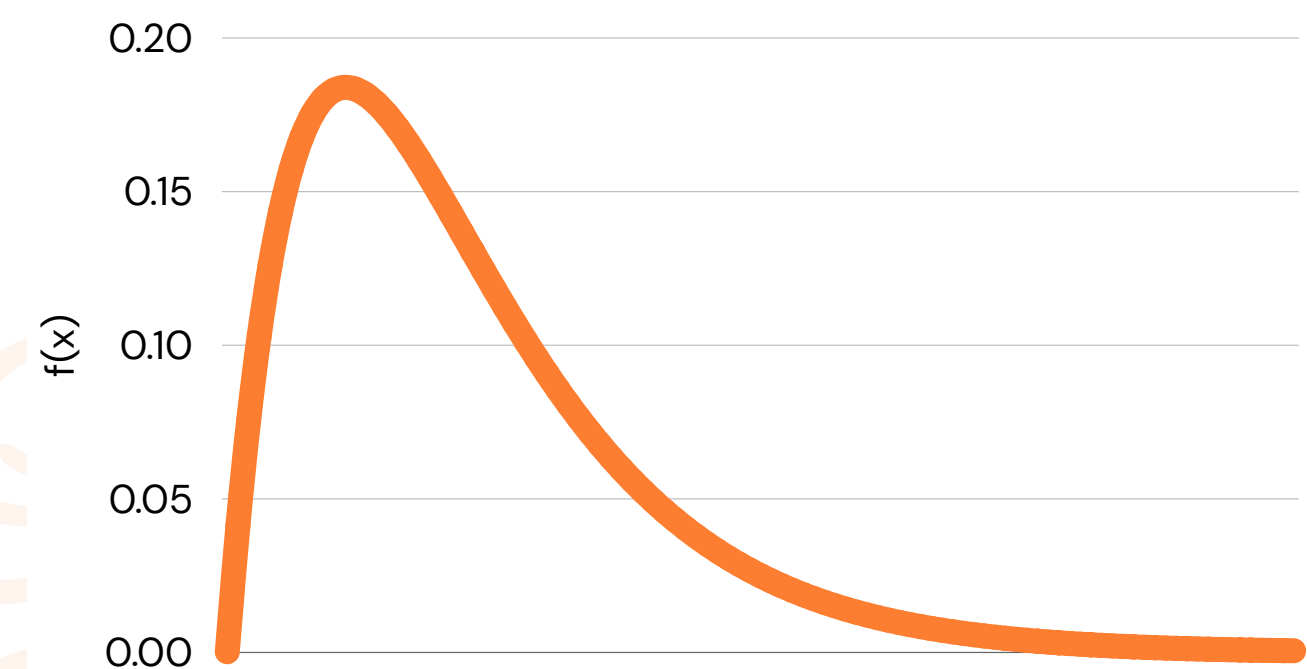
Cuando α es un entero positivo, se denomina distribución de Erlang

Varianza (σ^2)

$$\sigma^2 = \alpha \cdot \beta^2$$

Aplicaciones en ingeniería

- Modela el tiempo para completar tareas complejas (como reparación de máquinas) o sistemas con redundancia pasiva (standby), donde un componente empieza a funcionar cuando falla el anterior



Dist. Gamma

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

La demanda diaria de arroz en una tienda sigue una distribución Gamma con $\alpha=3$ y $\beta=1/2$ (en miles de kg). Determinar la probabilidad de que la demanda exceda los 5000 kg en un día dado

$$P(X > 5) = 1 - F(x=5) \longrightarrow \text{Cola de derecha}$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(3)\left(\frac{1}{2}\right)^3} \cdot x^{3-1} e^{-x \cdot 2} = \frac{1}{\Gamma(3) \cdot \frac{1}{4}} \cdot x^2 \cdot e^{-2x} \rightarrow F(x) = \int_s^\infty 2x^2 \cdot e^{-2x} dx$$

$\downarrow$ $2!$ $\downarrow$ $=$

$$P(X > 5) = 1 - 2 \int_0^5 x^2 \cdot e^{-2x} = 1 - 0.499 = \underline{\underline{0.501}}$$

Dist. Weibull

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}$$

Def. Distribución extremadamente flexible utilizada para modelar una gran variedad de fenómenos mediante el ajuste de sus parámetros

Propiedades

Parametros

- α (escala)
- β (forma)

Exponencial

Cuando $\beta = 1$

Media (μ)

$$\mu = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

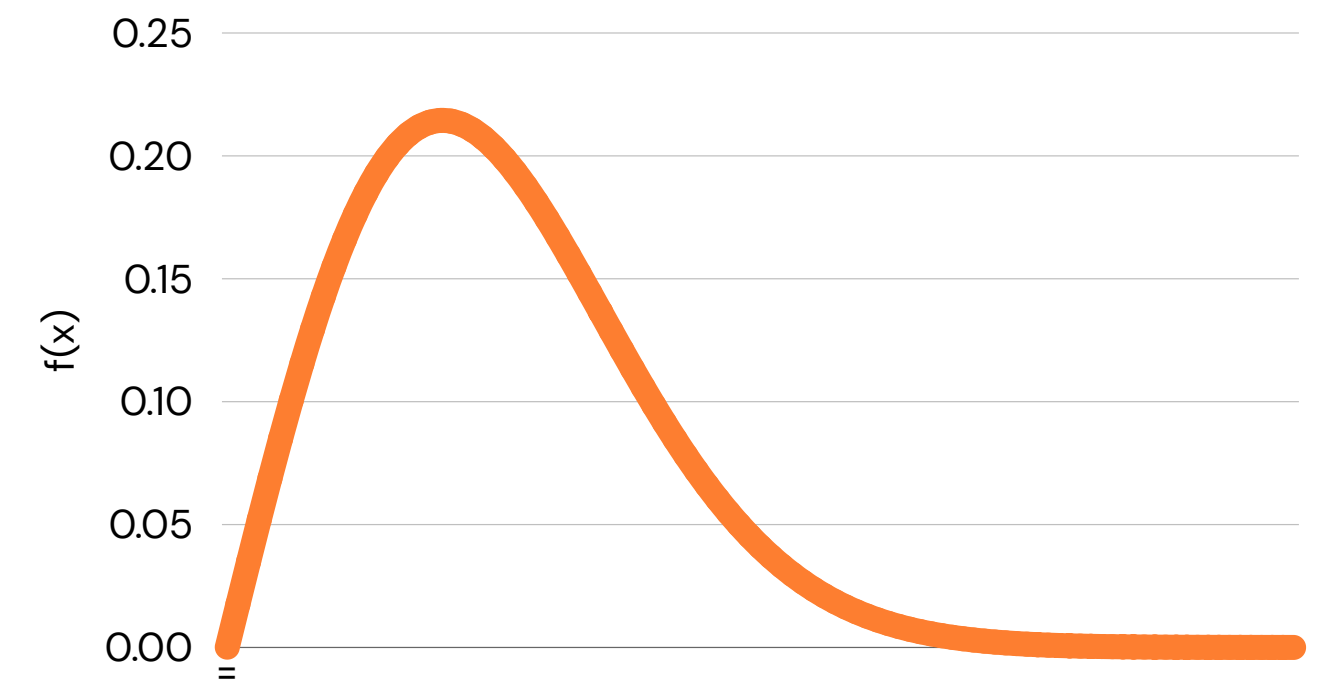
Varianza (σ^2)

$$\sigma^2 = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2 \right]$$

Aplicaciones en ingeniería

- Principalmente en ~~Mantenimiento~~ ^{confiabilidad} y mantenimiento para modelar el tiempo hasta la falla de equipos mecánicos o discos duros

- Tiempo para completar una tarea cuya distribución esta sesgada a la derecha.



Dist. Weibull

El tiempo que le toma a un avión en aterrizar y salir de la pista en un aeropuerto internacional de gran dimensión sigue una distribución de Weibull con **$v = 1.34$ minutos, $\beta = 0.5$ y $\alpha = 0.04$ minutos.** Calcule la probabilidad de que un avión tome más de 1.5 minutos para aterrizar y salir de la pista.

$$\begin{aligned} X &= 1.34 \\ \beta &= 0.5 \\ \alpha &= 0.04 \end{aligned}$$

$$P(X > 1.5) = 1 - F(X = 1.5) = \int_{1.5\beta}^{\infty} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^{\alpha}} dx$$

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\beta)^{\alpha}}$$

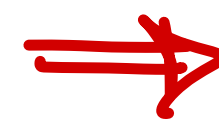
$$P(X > 1.5) = 1 - \left(1 - e^{-(x/\beta)^{\alpha}}\right) = e^{-(x/\beta)^{\alpha}}$$

Tiempo real adicional
1.34 asociado a la función

$$e^{-\left(\frac{1.5 - 1.34}{0.5}\right)^{0.04}} = e^{-\left(\frac{0.16}{0.5}\right)^{0.04}}$$

~~$P(X > 1.5) = e^{-\left(\frac{1.5}{0.5}\right)^{0.04}} = 0.351$~~

mal. Debido a que la f. Weibull dada ya tiene un tiempo asociado 1.34 min



$$P(X > 1.5) = e^{-\left(\frac{1.5 - 1.34}{0.5}\right)^{0.04}}$$

$$P(X > 1.5) = 0.385$$

Dist. Normal

Def. La famosa "campana de Gauss", simétrica respecto a su media

Propiedades

Media, mediana y moda son iguales (μ).

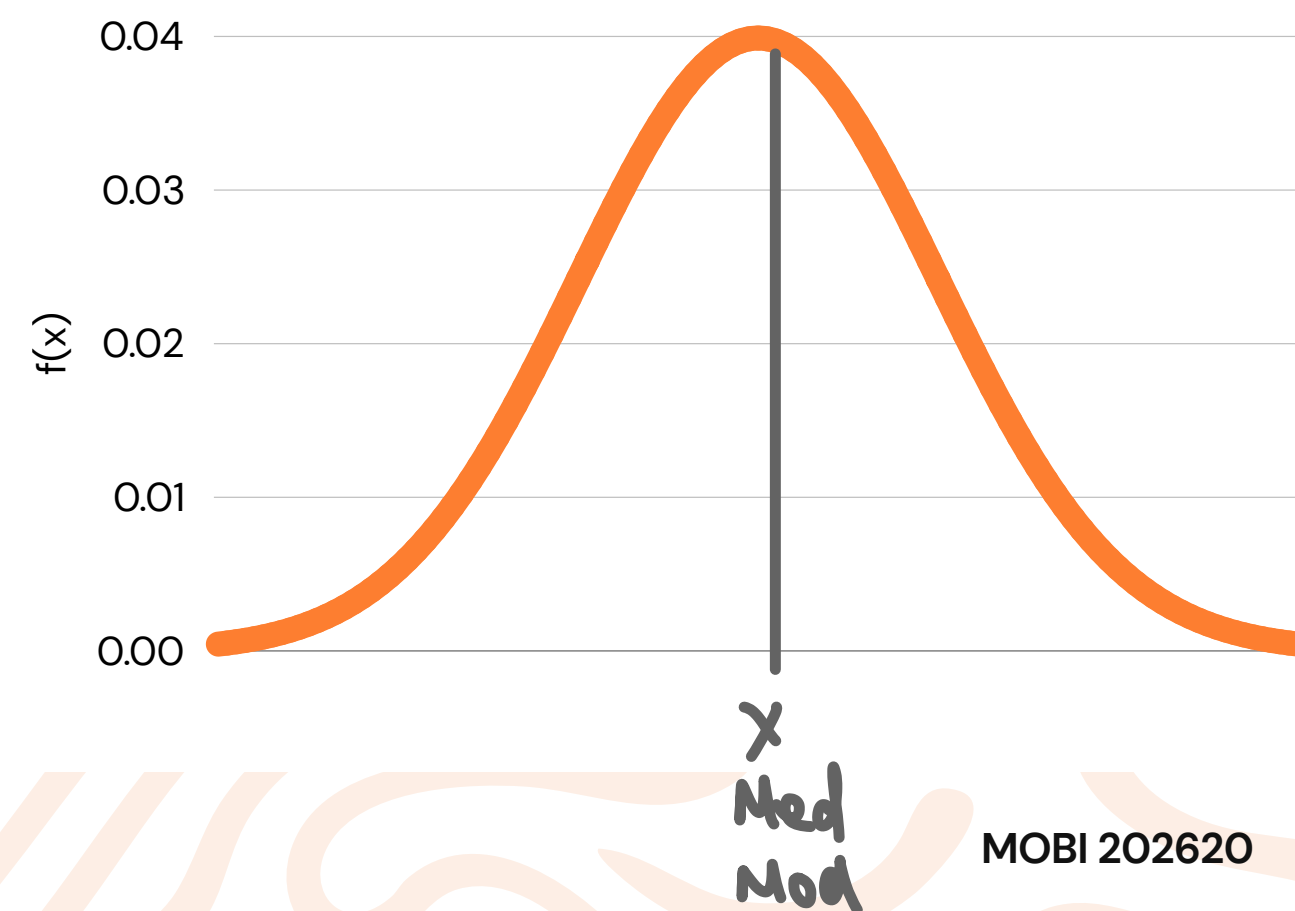
Dispersión es la desviación ($\sqrt{\sigma^2}$).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

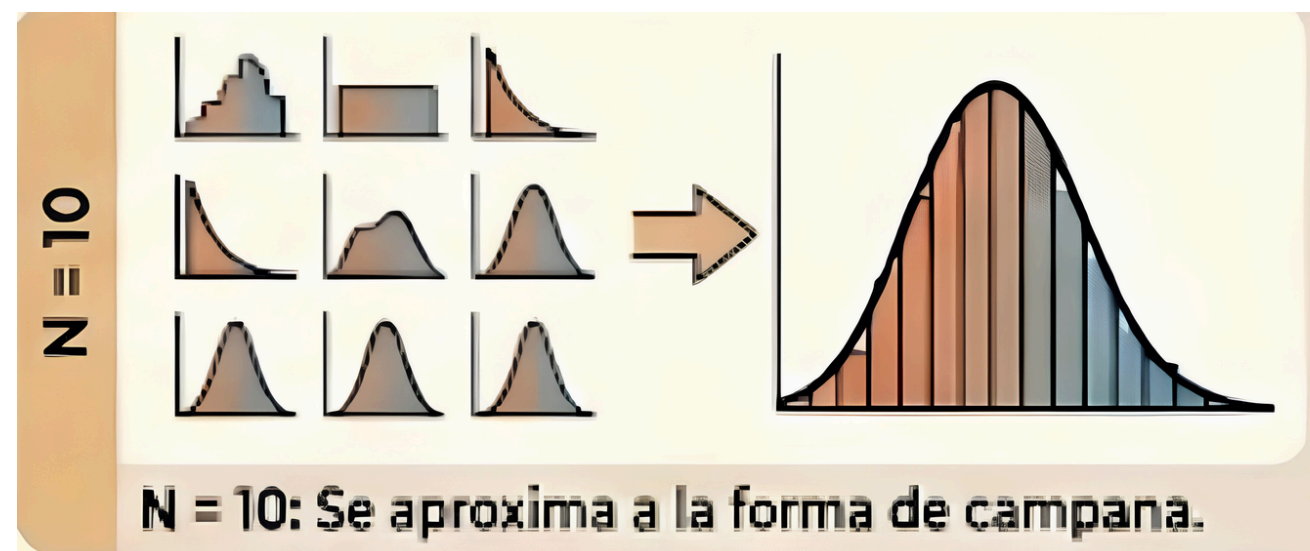
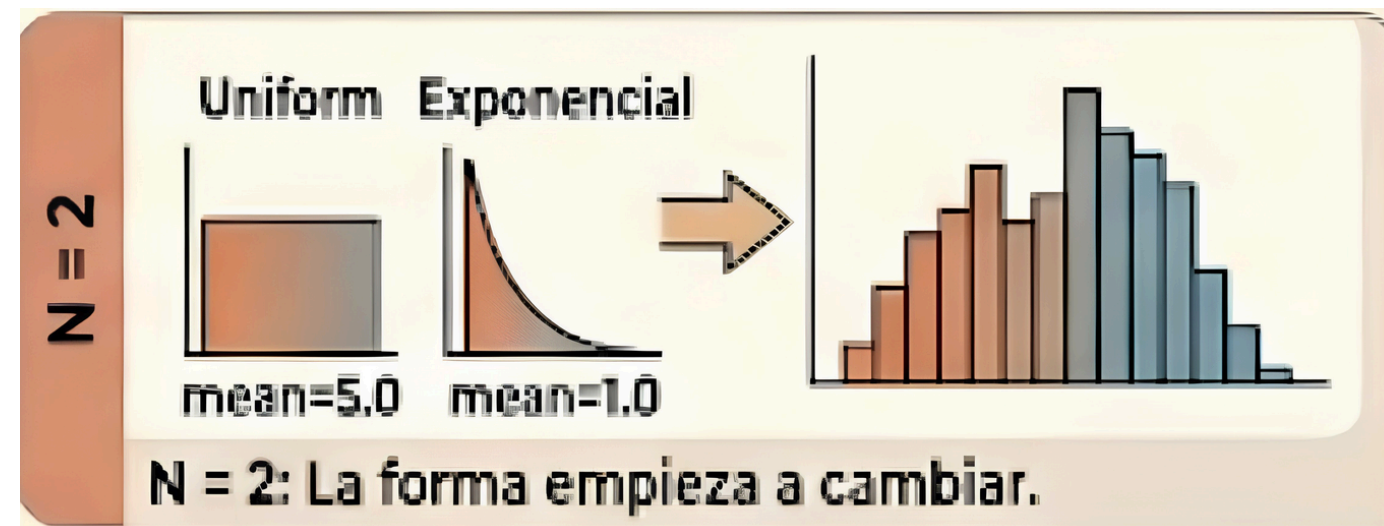
→ Cualquier transformación lineal de una variable con distribución normal seguirá también la dist normal

Aplicaciones en ingeniería

- Modela procesos que resultan de la suma de múltiples componentes, como errores de medición, tiempos de ensamblaje complejos o variaciones en piezas fabricadas



Dist. Normal (TLC)



Teorema del Límite Central (TLC)

Es fundamental en ingeniería porque establece que la suma de muchas variables aleatorias independientes tiende a seguir una **distribución normal**, sin importar la distribución original de las variables

soooooon...

Dist. Normal

El peso de los paquetes de un laboratorio sigue una distribución $N(1.8, 0.5)$ kg. ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete pese entre 1 y 2 kg?

→ se puede estandarizar por medio de $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

En donde $P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1)$

$$= \Phi\left(\frac{2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2 - 1.8}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 1.8}{0.5}\right)$$

→ $Z \sim N(0, 1)$

Función dist acumulada de la normal estandar

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

→ Funciones normales estandar enlazados en los resultados

se usa la propiedad
simetría valores negativos

$$= \Phi(0.4) - \Phi(-1.6) \rightarrow = \int_{-\infty}^{0.4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt - \left(1 - \int_{-\infty}^{1.6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt\right) = \Phi(0.4) - (1 - \Phi(1.6))$$

Calcula x tablas, calcula x tablas

$$= 0.6555 - 0.0548 = 0.6007$$

Dist. Normal estándar

Def. Caso especial de la Normal donde $\mu=0$ y $\sigma=1$

$$\rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Propiedades

Permite el uso de tablas estadísticas para cualquier distribución normal mediante la transformación

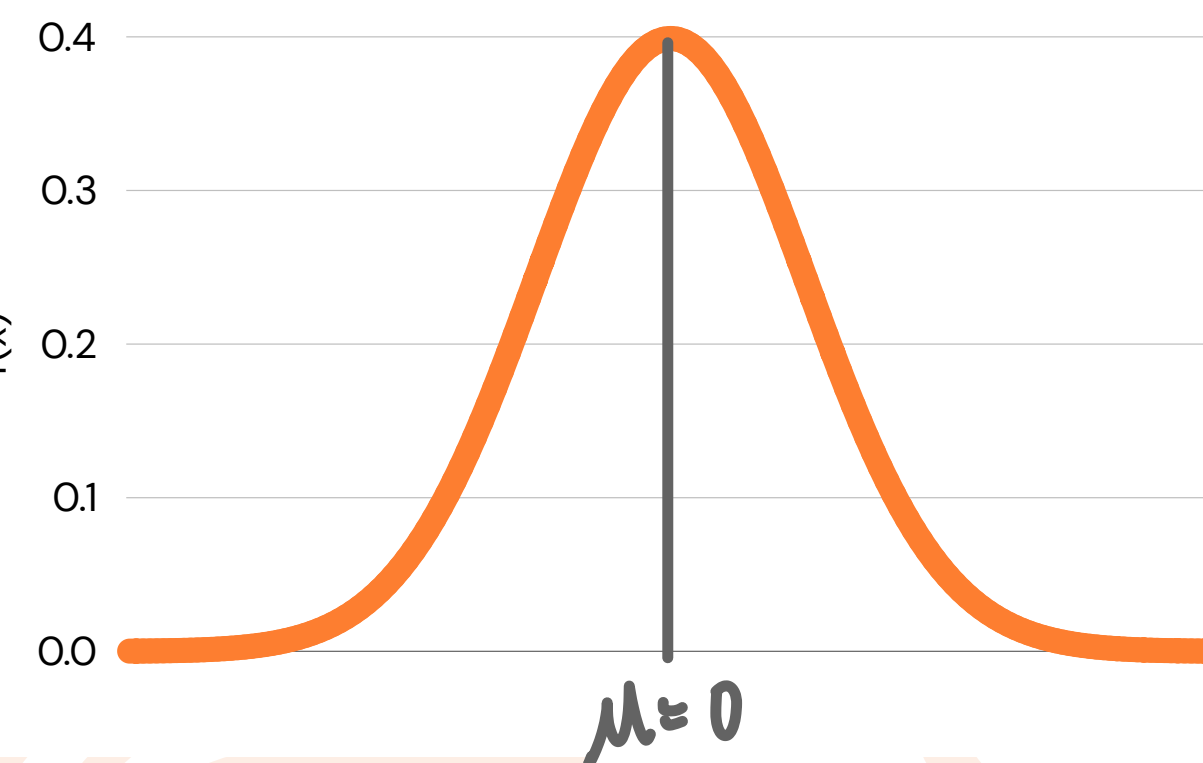
Aplicaciones en ingeniería

- Es la base para realizar inferencias estadísticas y cálculos de intervalos de confianza en cualquier fenómeno modelado como normal

$$\mu=0$$

$$\sigma=1$$

$\Phi(z)$ → Busca x tabla
 → Excel → `Norm.s.dist(0.4, true)`
 → Python → `np.random.standard-normal(0.4)`



Dist. Lognormal

Def. Distribución de una variable cuyo logaritmo sigue una distribución normal

Propiedades

Es asimétrica hacia la derecha y solo toma valores positivos

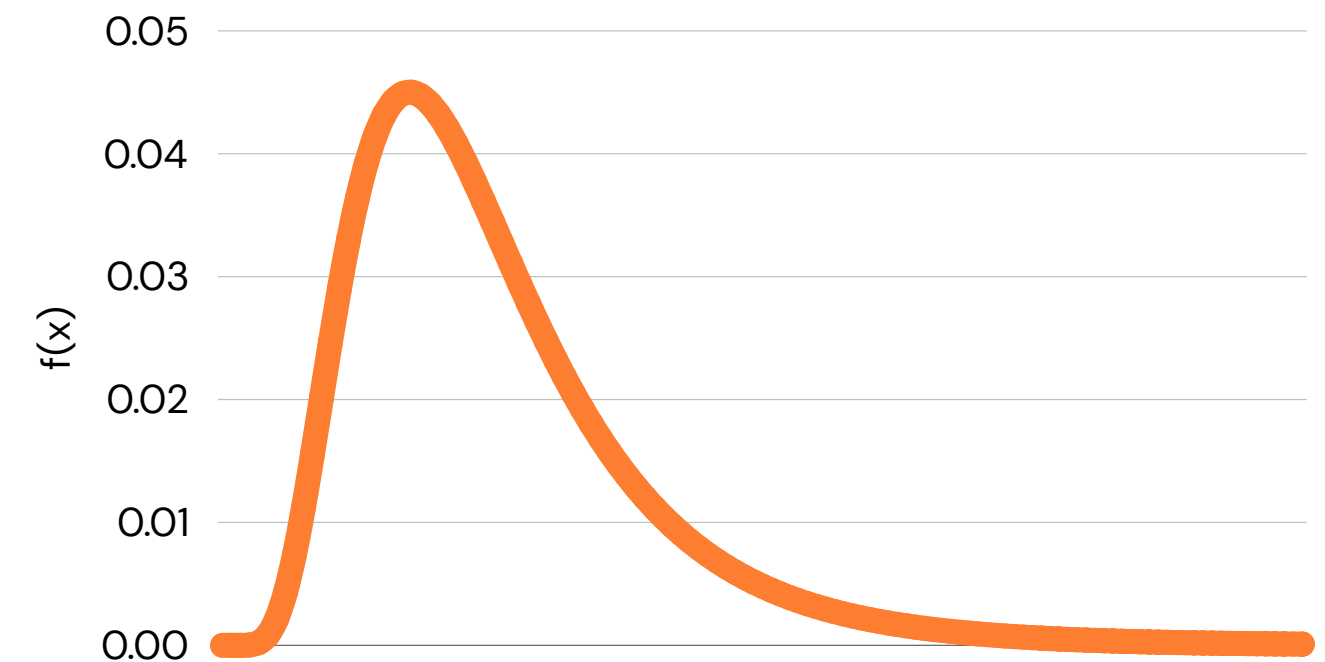
Aplicaciones en ingeniería

- Modela procesos que son el producto de varios componentes, como el retorno de inversiones con interés compuesto o el tiempo hasta la falla de ciertos materiales bajo estrés

$$f(x) = \frac{e^{\left(\frac{-(\ln(x-\mu))^2}{2\sigma^2}\right)}}{x\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\mu = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

$$\sigma^2 = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}$$



Dist. Lognormal

La tasa de retorno de una inversión volátil se modela como lognormal con media 20% y desviación estándar 5%. Calcula los parámetros μ y σ^2 de la distribución normal asociada poder simular este sistema.

$$RI \sim \text{Ln}(\mu = 0.2, \sigma = 0.05)$$

$$\longrightarrow \text{Ln}(RI) \sim N(-1.640, 0.246)$$

$$\sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{s^2}{m^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{0.05^2}{0.2^2}\right) = 0.0606$$

$\swarrow \sigma = \sqrt{0.0606}$

$$\downarrow X = e^Y \sim \text{Ln}(RI)$$

$$\mu = \ln(m) - \frac{\sigma^2}{2} = \ln(0.2) - \frac{0.0606}{2} = -1.640$$

→ calcular la probabilidad con los parámetros ^{dist} normales calculados

Dist. Beta

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

Def. Distribución extremadamente flexible acotada a un límite superior e inferior. Puede ser trasladada del 0, por medio de la adición de una constante y puede darle un rango mayor a $[0,1]$ si se multiplica el rango por una constante

Propiedades → uniforme es un caso de la Beta

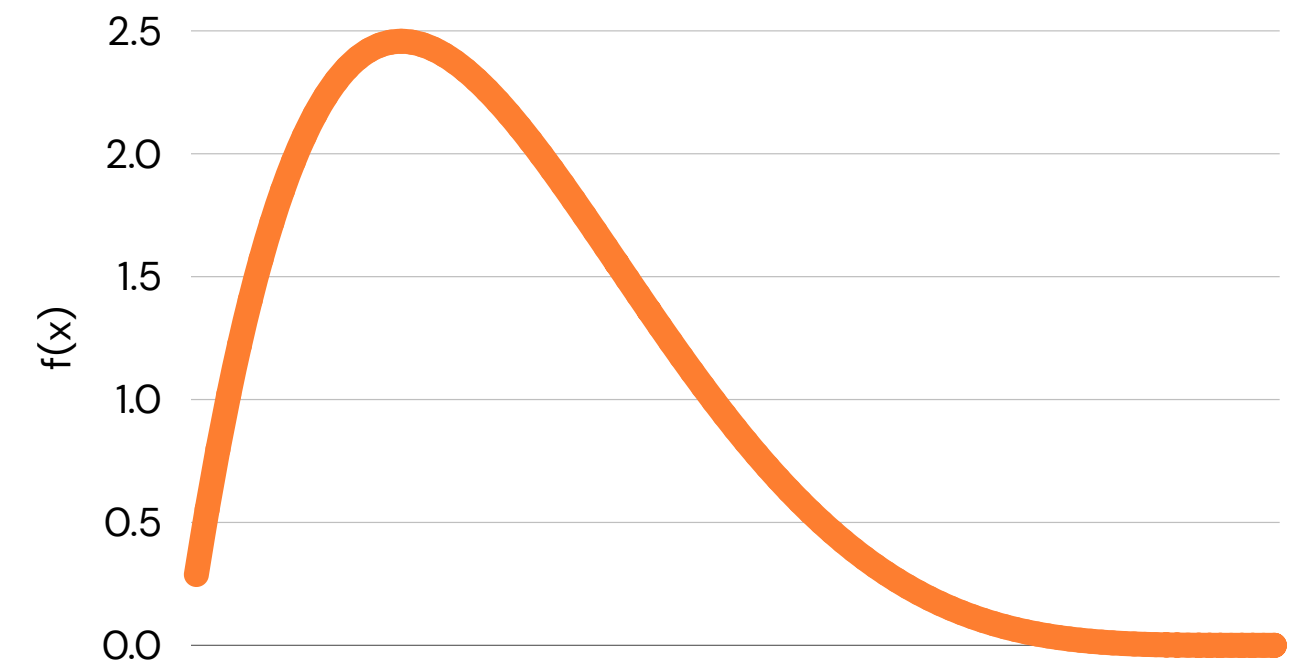
Muy flexible para representar proporciones; si ambos parámetros de forma son 1, se convierte en la Uniforme (0,1)

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

Aplicaciones en ingeniería

- Útil para modelar proporciones de defectos en un lote o el tiempo para completar tareas en redes PERT cuando hay límites fijos de tiempo



Dist. Beta

Supongamos que el tiempo para completar una tarea de ingeniería sigue una distribución Beta en el intervalo con parámetros $\alpha=1.47$ y $\beta=2.16$. Si en la vida real la tarea tiene un tiempo mínimo de inicio de -10 minutos y un máximo de 20 minutos, ¿cómo transformarías los valores generados por la distribución Beta al intervalo $[-10,20]$?

$X \sim \text{Beta}(1.47, 2.16) \rightarrow (0,1)$ | Para transformarlo a $[-10,20]$
Aplica transformación lineal

$$Y = a + (b-a)X \rightarrow Y = -10 + (20 + 10)X = -10 + 30X$$



Forma de la uniforme (0,1)

Dist. Triangular

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c \leq x \leq b \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

Def. Modela procesos basándose solo en los valores mínimo (a), máximo (b) y más probable (m)

Propiedades

Su densidad forma un triángulo. La media es la suma de los tres parámetros dividida por tres

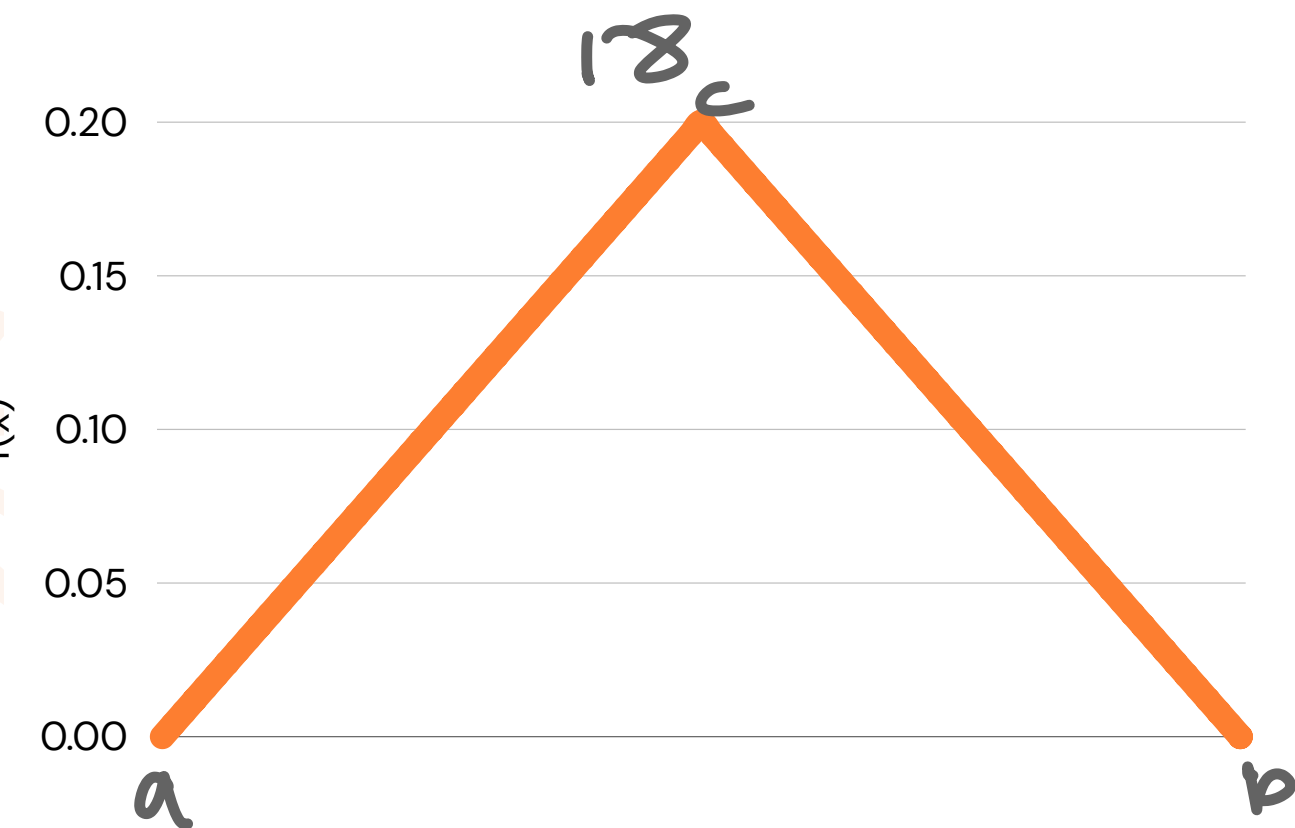
$$\mu = \frac{a+b+c}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{6}$$

Aplicaciones en ingeniería

- Se usa frecuentemente en ausencia de datos históricos, basándose en estimaciones subjetivas de expertos. Es una mejora sobre la uniforme al incluir el valor más probable

$$F(x) = \frac{(b-m)^2}{(b-a)(b-c)}$$



Dist. Triangular

② ¿Cuál es la varianza del proceso?

$$\sigma^2 = \frac{10^2 + 25^2 + 11.67^2 - (10 \cdot 25) - (10 \cdot 11.67) - (25 \cdot 11.67)}{18}$$

$$\sigma^2 = 3.35 \text{ segundo}$$

Un proceso de ensamblaje tiene un rango de 10 a 25 segundos y una mediana de 15 segundos. Calcular el valor modal del tiempo de ensamblaje

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c \leq x \leq b \\ 0 & \text{del } c \end{cases} \rightarrow \text{La moda se encuentra aquí}$$

$$f(x) = \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}$$

$$P(X > x) = \int_x^b \frac{2(b-t)}{(b-a)(b-c)} dt$$

La moda es de cola derecha

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$$

$$F(x) = 1 - \frac{(25-x)^2}{(25-10)(25-c)}$$

$$F(x = \text{mediana}) = 0.5 \rightarrow 0.5 = 1 - \frac{10^2}{15(25-c)}$$

$$c = 11.67$$

Relaciones matemáticas entre VA

La distribución de la suma de variables independientes se determina mediante la convolución de sus funciones de densidad o masa

Σ Normales

La suma de variables normales independientes es también una variable normal

Σ Poisson

La suma de variables de Poisson independientes sigue siendo una distribución de Poisson

Σ Exponenciales

La suma de n variables exponenciales independientes e idénticas resulta en una distribución de Erlang de orden n

Relación Beta-Gamma

Una variable con distribución **Beta** se puede obtener a partir de dos variables **Gamma independientes** (Y_1, Y_2) mediante la relación $X = Y_1 / (Y_1 + Y_2)$

Relaciones entre variables

- **$X \sim \text{Binomial}(1, p)$ es la distribución Bernoulli(p).**
- $\text{Exp}(\beta)$ y $\text{Weibull}(1, \beta)$ son la misma distribución.
- **$\text{Exp}(\beta)$ y $\text{Gamma}(1, \beta)$ son la misma distribución.**
- $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$ si y solo si $X^\alpha \sim \text{Exp}(\beta\alpha)$.
- **$U(0, 1)$ y $\text{Beta}(1, 1)$ son la misma distribución.**
- $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ si y solo si $1 - X \sim \text{Beta}(\beta, \alpha)$.
- $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ es la suma de n variables independientes Bernoulli(p).
- $X \sim \text{Erlang}(k, \beta)$ (o $\text{Gamma}(k, \beta)$ con k entero) es la suma de k variables independientes $\text{Exp}(\beta)$.
- $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ si y solo si $(X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ (Normal Estándar).
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si y solo si $e^X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$.
- **$X \sim \text{Geometrico}(p)$ es la distribución Binomial Negativa(1, p).**
- $X \sim \text{Binomial Negativa}(s, p)$ es la suma de s variables independientes Geometrico(p).
- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ describe el número de eventos en un intervalo si el tiempo entre ellos es $\text{Exp}(1/\lambda)$.