

# Simulación de Monte Carlo

**Juliana Quintana-Rojas**

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Los Andes

**Def.** Esquema que emplea números aleatorios para resolver problemas estocásticos o incluso problemas deterministas. A diferencia de la simulación de eventos discretos, los modelos de Monte Carlo suelen ser estáticos, lo que significa que representan un sistema en un punto específico en el tiempo o en situaciones donde el paso del tiempo no juega un papel crítico

### Evaluación de integrales:

Se utiliza para aproximar el valor de integrales complejas, especialmente integrales múltiples con integrandos difíciles de manejar analíticamente

*Ejemplo determinista*

### Análisis de confiabilidad

Estimación del tiempo de falla de sistemas compuestos por múltiples componentes con comportamientos aleatorios independientes

### Gestión de riesgos y finanzas:

Evaluación de riesgos en proyectos, descubrimiento de petróleo y gas, y análisis de carteras de inversión

# Proceso General

**Obj.** Transformar el problema de interés en la estimación de un valor esperado de una variable de interés



# Componentes

1

GENERADOR DE NÚMEROS  
PSEUDO-ALEATORIOS

**LCG**

*Linear Congruent Generator*

2

DEFINICIÓN DE  
DISTRIBUCIONES DE  
PROBABILIDAD DE ENTRADA

*Por contexto*

*Pruebas de bondad de ajuste*

3

GENERADORES DE VARIABLES  
ALEATORIAS

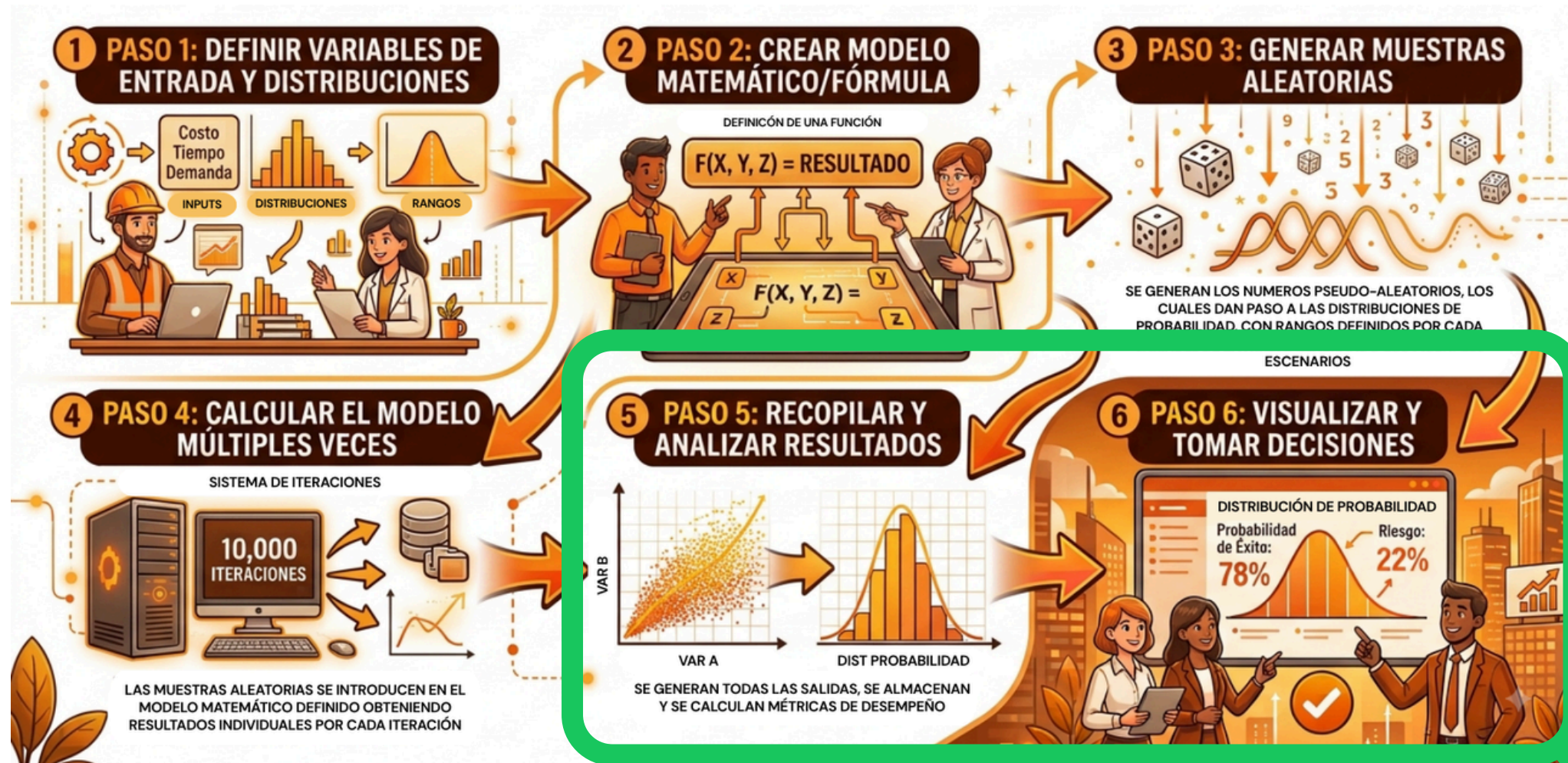
*Transformada inversa  
Aceptación y Rechazo  
Box-Muller*

4

ESTIMADOR DE RESPUESTA

*Media de las muestras, que sirve  
como estimación del valor real del  
sistema  
**(TLC) → SOON***

# Análisis de Salida MC



Etapa donde se interpretan los datos generados para convertirlos en información útil para la toma de decisiones.

Dado que los modelos de simulación utilizan variables aleatorias como entrada, los resultados que producen son también variables aleatorias; por lo tanto, una sola "corrida" no es suficiente para obtener una respuesta definitiva.

# Ejemplo Integrales

$X \sim U(a, b) \rightarrow$  V.A distribuida uniforme.

Supongamos que queremos evaluar la integral

$$I = \int_a^b g(x) dx$$

Donde  $g(x)$  es una función de valor real que no es analíticamente integrable. Para abordar este problema mediante simulación de Monte Carlo, sea  $Y$  la variable aleatoria

$$Y = (b-a)g(x)$$

donde  $X$  es una variable aleatoria continua distribuida uniformemente en  $[a, b]$  ( $U(a, b)$ ).

Cuál es el valor esperado de  $Y$

$$E(Y) = E[(b-a)g(x)]$$

Función no integrable analíticamente  
 (con una flecha que apunta a la  $g(x)$  en la ecuación)

$$E(Y) = (b-a) E[g(x)]$$

$$E(Y) = (b-a) \int_a^b g(x) f_x(x) dx$$

$$= (b-a) \int_a^b g(x) dx$$

$b-a$

$$I = \frac{(b-a) \int_a^b g(x) dx}{b-a}$$

$$\bar{Y}(n) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = (b-a) \frac{\sum_{i=1}^n g(x_i)}{n}$$

Resolvamos el MC  
**Visual Studio Code**

# Teorema de Límite Central (TLC)

**Def.** La suma (o el promedio) de un gran número de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (IID) tiende a seguir una distribución normal, independientemente de la distribución original de dichas variables

$$\bar{X}_n \approx N \left( \mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

**$n$  → # número de replicas**

**$\mu$  → media observació**

**$\sigma^2$  → varianza observación**

## Papel Fundamental

Permite usar tablas Z o t-Student para calcular la precisión de una estimación, sin conocer la forma exacta de la salida del sistema.

## Validez de resultados

Aunque los tiempos de falla o de servicio no sean normales, el promedio de esos tiempos (obtenido tras muchas réplicas) sí lo será

# Paso a paso TLC

Tenemos  $n = 1000$  réplicas,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{1000} \rightarrow Y_i$  es el resultado completo de correr el modelo una vez).

Sumar las 1000 réplicas

$$S = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_{1000}$$

Dividir entre  $n$  para obtener el promedio:

$$\bar{Y} = \frac{S}{n} = \frac{S}{1000} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \sim \text{Estimador } \mu$$

Calcular la dispersión de esas 1000 réplicas alrededor de

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{999} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)^2 \sim \text{Estimador } \sigma^2$$

Calcular error estándar del promedio

$$S.E. = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{S^2}{1000}}$$

## TLC

La suma de  $n$  independientes variables aleatorias sigue una distribución Normal

$$Y \approx \text{Normal}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

↓ Cálculo Intervalo Confianza

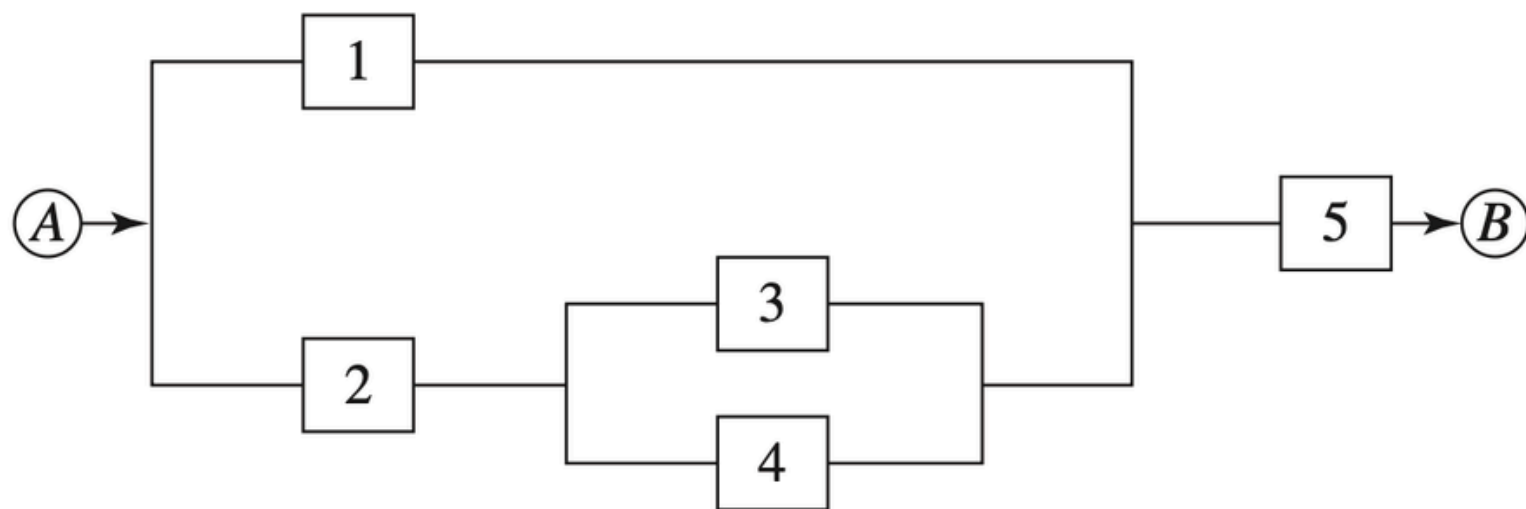
$$IC \ 95\% = \bar{Y} \pm \underbrace{\Phi_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}} \cdot SE$$

$$IC = \bar{Y} \pm 1.96 \cdot SE$$

↓ Función dist. acumulada de la Normal estándar

# Ej: Sistema Multicomponente

Considere el siguiente sistema, donde se desea enviar una señal de A a B. Cada uno de los cinco componentes está sujeto a fallos aleatorios, y los componentes fallan de manera independiente entre sí. Sea **Y el tiempo hasta la falla de todo el sistema** y sea  $X_i$  el tiempo hasta la falla del componente  $i$ , para  $i=1, 2, \dots, 5$ .



Asumimos que  $X_i$  está distribuido exponencialmente con una media de  $b_i$  días, con los  $b_i$  dados en

| $i$ | $\beta_i$ |
|-----|-----------|
| 1   | 10        |
| 2   | 8         |
| 3   | 7         |
| 4   | 5         |
| 5   | 6         |

1. Calcule el tiempo esperado de falla del sistema
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema siga funcionando después de 7 días ?

Resolvamos el MC  
**Visual Studio Code**

# Ej: Estimar $\pi$ lanzando dardos

Imagina un cuadrado de lado 2 (área = 4) con un círculo de radio 1 inscrito en él (área =  $\pi \cdot 1^2 = \pi$ ). Si lanzas dardos uniformemente al azar sobre el cuadrado, la probabilidad de que un dardo caiga dentro del círculo es

$$P(\text{dentro del círculo}) = \frac{\text{área del círculo}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{\pi}{4}$$

Si lanzas  $n$  dardos y cuentas cuántos caen dentro del círculo, puedes despejar  $\pi$ :

$$\hat{\pi} = 4 \cdot \frac{\text{dardos dentro}}{n}$$

La posición de cada dardo se modela con dos variables aleatorias independientes  $X, Y \sim \text{Uniforme}(-1, 1)$  (las coordenadas dentro del cuadrado), y un dardo cae dentro del círculo si

$$X^2 + Y^2 \leq 1$$

1. ¿Cuál es el valor de  $\pi$ ? ~ Estimador
2. ¿Tan lejos está del valor real?
2. ¿Qué tan precisa es esa estimación?
3. ¿Qué tan lejos está del valor real?

Resolvamos el MC  
**Visual Studio Code**