

Modelación de colas simples $M/M/1$

Juliana Quintana-Rojas

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

Diseño de producto para la piel:

barra de sueros personalizados

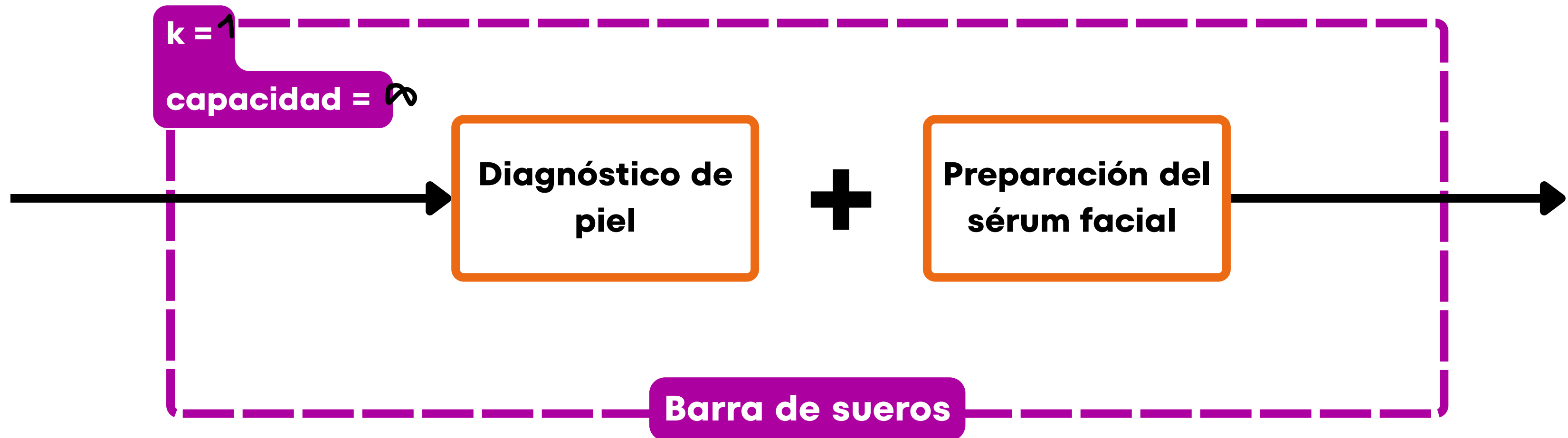
Una marca de cosmética abre una barra de sueros personalizados en su tienda insignia: el cliente completa un diagnóstico rápido de piel y una sola esteticista prepara, en el momento, un sérum facial a la medida. Los clientes llegan siguiendo un proceso **Poisson con $\lambda=9$ clientes/hora**, el tiempo de diagnóstico + mezcla es exponencial con media 5.5 minutos

1. Gráfique el sistema de la barra de sueros personalizados ✓
2. Clasificar el sistema en notación de Kendall y verificar la condición de estabilidad ✓
3. Calcular ρ , L , L_q , W , W_q , la probabilidad de que un cliente encuentre fila ✓
4. Implementar las fórmulas en Python y graficar cómo se disparan L y W_q a medida que $\lambda \rightarrow \mu$

Determine si conviene abrir una segunda estación.

Ej. Diseño de producto para la piel

Gráfique el sistema de la barra de sueros personalizados



Ej. Diseño de producto para la piel

Clasificar el sistema en notación de Kendall y verificar la condición de estabilidad

Llegadas = Poisson
servicio = Exponencial
servidores = 1
capacidad = ∞

} M / M / 1

Ej. Diseño de producto para la piel

Calcular ρ , L , L_q , W , W_q , la probabilidad de que un cliente encuentre fila $\rightarrow M/M/1$

$$\lambda = 9 \text{ clientes/hora}$$

$$\mu = 5.5 \text{ min} = \frac{5.5 \text{ min}}{60 \text{ min}} = 10.91 \text{ clientes/hora}$$

¿El sistema es estable?

Se debe cumplir la siguiente condición:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

λ → Tasa de arribo
 μ → Tasa de servicio
 ρ → proporción de utilización servidor $\approx$ probabilidad este ocupado
 $\rho < 1$ → Sistema estable

A) $\rho = \frac{9}{10.91} = 0.825 < 1$

B) $L = \lambda \cdot W \rightarrow$ No tenemos W
¿Que hacemos?

→ otra manera de escribir L en estado estable

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0.8250}{1 - 0.8250} = 4.71 \text{ clientes}$$

¿Cual es la probabilidad de que el servidor este vacío?

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.825 = 0.175$$

Ej. Diseño de producto para la piel

Calcular ρ , L , L_q , W , W_q , la probabilidad de que un cliente encuentre fila $\rightarrow M/M/1$

c) $L_q = L - \rho$ $\left\{ \begin{array}{l} k=1 \end{array} \right.$ El servidor puede solo atender a un cliente a la vez y esta ocupado con probabilidad ρ
 $E[\# \text{ en servicio}] = 1 \cdot P(\text{servidor ocupado}) + 0 \cdot P(\text{servidor Libre}) = \rho$

$$L_q = \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) - \rho \rightarrow \frac{\cancel{\rho}}{1-\rho} - \frac{(\cancel{\rho} + \rho^2)}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.825^2}{1-0.825} = 3.89 \text{ clientes}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Ej. Diseño de producto para la piel

Calcular ρ , L , L_q , W , W_q , la probabilidad de que un cliente encuentre fila

$$D) L = \lambda \cdot w$$

$$4.71 = 9 \cdot w$$

$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{4.71 \text{ clientes}}{9 \text{ clientes/hora}} = 0.538 \text{ horas} \rightarrow 31.43 \text{ min}$$

ó

↓ En caso de no tener algún valor se puede calcular así:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

→ ¿De donde salen?

$$E) L_q = \lambda \cdot W_q$$

$$3.89 = 9 \cdot W_q$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.89 \text{ clientes}}{9 \text{ clientes/hora}}$$

$$W_q = 25.93 \text{ min.}$$

↓ ó

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

De aande sale $w = \frac{1}{\lambda - \mu}$ y $wq = \frac{\rho}{\lambda - \mu}$?

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \left| \begin{array}{l} \textcircled{1} L = \lambda W \\ L = \frac{\rho}{1-\rho} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \textcircled{2} Lq = \lambda Wq \\ Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\mu - \lambda}{\mu}} = \frac{\lambda \cancel{\mu}}{\cancel{\mu}(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\cancel{\lambda}}{\mu - \lambda} \cdot \frac{1}{\cancel{\lambda}} = \boxed{\frac{1}{\mu - \lambda}}$$

$$\textcircled{2} Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda^2}{\mu^2}}{\frac{\mu - \lambda}{\mu}} = \frac{\lambda^2 \mu}{\mu^2(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\mu}} \cdot \frac{1}{\mu - \lambda} = \boxed{\frac{\rho}{\mu - \lambda}}$$

Ej. Producción de carros

Un fabricante de automóviles ensambla la puerta delantera de un nuevo modelo a partir de 4 piezas troqueladas. Por la variabilidad natural del proceso de troquelado, la dimensión crítica de cada pieza (en mm) es una variable aleatoria normal.

La holgura de ensamblaje es $G = X_1 - X_2 - X_3 - X_4$. La puerta cierra bien, sin reproceso, solo si G cae dentro de la ventana de tolerancia [403.5, 404.5] mm.

Pieza	Media (mm)	Desv. estándar (mm)
Marco estructural (X1)	452	0.35
Soporte de bisagra (X2)	18	0.1
Canal de ventana (X3)	25.5	0.15
Empaque de sellado (X4)	4.2	0.05

1. Cuál es la distribución exacta de G , su media, varianza, y la probabilidad analítica de reproceso
2. Realice la estimación por sim. Monte Carlo, y calcule las métricas (media, desviación estándar, error estándar, IC 95%, error relativo frente al valor analítico).

Ej. Producción de carros

Cuál es la distribución exacta de G, su media, varianza, y la probabilidad analítica de reproceso

$$G = X_1 - X_2 - X_3 - X_4$$

$$E[G] = \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$$

$$E[G] = 452 - 18 - 25.5 - 4.2 = 404.3$$

$$\text{Var}(G) = \sum_{i=1}^n (\sigma_{X_i})^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \sigma_{X_3}^2 + \sigma_{X_4}^2 = 0.1575$$

$$0.35^2 + 0.1^2 + 0.15^2 + 0.05^2$$

$$\sigma_G = \sqrt{0.1575} = 0.3969$$

① **Propiedad Dist. Normal**

G es la combinación lineal de dist. normales independientes

↳ G también sigue una dist normal

Probabilidad reproceso

$$Z_L = (403.5 - 404.3) / 0.3969 = -2.016$$

$$Z_U = (404.3 - 403.5) / 0.3969 = 0.504$$

$$P(\text{rep}) = P(G < L) + P(G > U)$$

$$= \Phi(-2.016) + [1 - \Phi(0.504)]$$

$$= 0.0219 + 0.3072 = \underline{\underline{0.3291}}$$

Ej. Producción de carros

Realice la estimación por sim. Monte Carlo, y calcule las métricas (media, desviación estándar, error estándar, IC 95%, error relativo frente al valor analítico).

Para $j = 1 \dots n$

Para $i = 1 \dots 4$

$X_{LCG} \rightarrow (a \cdot X_{LCG} + c) \bmod m$; $U_i \rightarrow X_{LCG}/m$; $Y_i \rightarrow \mu_i + \sigma_i \cdot \Phi^{-1}(U_i)$

Fin para i

$G_j \rightarrow X_1 - X_2 - X_3 - X_4$

Si $(G_j < L)$ o $(G_j > U)$

$I_j \rightarrow 1$

Si no

$I_j \rightarrow 0$

Condición
reproceso

Fin

n : # réplicas

L y U límites tolerancia.

Ej. Producción de carros

Realice la estimación por sim. Monte Carlo, y calcule las métricas (media, desviación estándar, error estándar, IC 95%, error relativo frente al valor analítico).

$$\bar{G} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_i \quad ; \quad S_G = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (G_j - \bar{G})^2} \quad SE_G = \frac{S_G}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_j \quad SE_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$I C (var) = var \pm 1.96 SE var.$$

Ej. Desarrollo de un snack saludable

Una startup de snacks saludables (barras de granola horneadas y empacadas por pedido) tiene una única línea de horneado y empaque. Los pedidos llegan Poisson con **$\lambda=6$ pedidos/hora**; el tiempo de horneado + empaque es exponencial con media 8 minutos.

1. Calcular ρ, L, L_q, W, W_q
2. Construir una simulación de eventos discretos de Monte Carlo:
 - Generar tiempos entre llegadas y de servicio
 - Simular una jornada de 10 horas, estimar empíricamente esas mismas métricas
3. Comparar simulación contra fórmula analítica: ¿qué tan cerca están, y qué tan larga tiene que ser la corrida para que la diferencia sea pequeña?

Ej. Desarrollo de un snack saludable

media = 8 min $\rightarrow$ ¿tasa?

Calcular ρ, L, L_q, W, W_q

$$\mu = \frac{1}{m} = \frac{1}{8 \text{ min}} \left(\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \right) = 7.5 \text{ ped/h}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6 \text{ ped/h}}{7.5 \text{ ped/h}} = 0.8 \rightarrow \text{utilización} < 1 \sim \text{Estable.}$$

$$L = \lambda \cdot W \approx \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.8}{0.2} = 4 \text{ pedidos} \quad \left| \quad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.8^2}{0.2} = 3.2 \text{ pedidos}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{4}{6 \text{ ped/h}} = 0.66 \text{ h} \rightarrow 40 \text{ min}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.2}{6} = 0.53 \text{ h}$$

$$W_q = 32 \text{ min}$$

Ej. Desarrollo de un snack saludable

Construir una simulación de eventos discretos de Monte Carlo:

- Generar tiempos entre llegadas y de servicio
- Simular una jornada de 10 horas, estimar empíricamente esas mismas métricas

$X_{LCG} \rightarrow X_0$
Para $k = 1 \dots N$
 $t \rightarrow 0$; $i \rightarrow 0$
mientras que $t \leq T$
 $X_{LCG} \rightarrow (a \cdot X_{LCG} + c) \bmod m$; $V \rightarrow X_{LCG} / m$; $A \rightarrow -\ln(1 - V) / \lambda$; $t \rightarrow t + A$
Si $t \leq \bar{t}$
 $i \rightarrow i + 1$
Llegada $i \rightarrow t$
FIN Mientras
 $n_k \rightarrow i$; salida $\rightarrow 0$

Generador Llegadas

Ej. Desarrollo de un snack saludable

Construir una simulación de eventos discretos de Monte Carlo:

- **Generar tiempos entre llegadas y de servicio**
- **Simular una jornada de 10 horas, estimar empíricamente esas mismas métricas**

Para $i=1$, hasta $h \in \mathbb{R}$

Servicio cada pedido.

$$X_{LCC} \rightarrow (a \cdot X_{LCC} + c) \bmod m ; V \rightarrow X_{LCC} / m ; S_i \rightarrow \frac{-\ln(1-V)}{\mu}$$

$$\text{inicio}_i \rightarrow \max(\text{llegada}_i, \text{salida}_{i-1})$$

$$\text{salida}_i \rightarrow \text{llegada}_i + S_i$$

FIN Para

FIN Para

Ej. Desarrollo de un snack saludable

Construir una simulación de eventos discretos de Monte Carlo:

- Generar tiempos entre llegadas y de servicio
- Simular una jornada de 10 horas, estimar empíricamente esas mismas métricas

Métricas x día (k)

$$\bar{W}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (\text{salida}_i - \text{llegada}_i) \quad \bar{W}_{qk} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (\text{inicio}_i - \text{llegada}_i)$$

Métricas x días (m)

$$\hat{W} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{W}_k \quad ; \quad SW = \frac{1}{M-1} \sqrt{\sum_{i=1}^M (\bar{W}_k - \hat{W})^2} \quad ; \quad SE = \frac{SW}{\sqrt{M}} \quad ; \quad IC$$

Ej. Desarrollo de un snack saludable

Comparar simulación contra fórmula analítica: ¿qué tan cerca están, y qué tan larga tiene que ser la corrida para que la diferencia sea pequeña?