

Procesos Estocásticos y proceso de Poisson

Juliana Quintana-Rojas

Departamento de Ingeniería Industrial

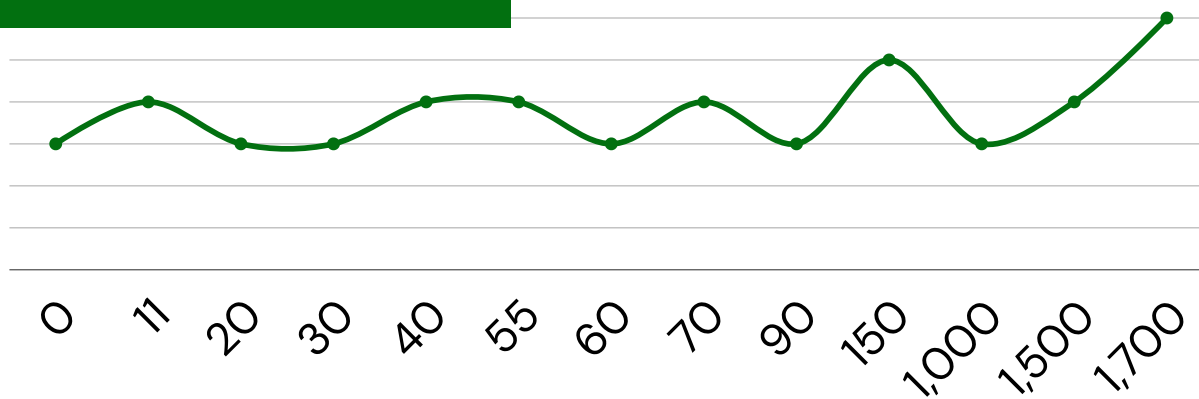
Universidad de Los Andes

¿Qué es un Proceso Estocástico?

Def. Modelo matemático y probabilístico que describe la evolución de un sistema que cambia de manera aleatoria a lo largo del tiempo.

Formalmente, es una familia de variables aleatorias $\{X(t) \rightarrow t \in T\}$ ordenadas en el tiempo y definidas con un índice, que es representado por (t) y definidas sobre un espacio de probabilidad común.

Tiempo continuo



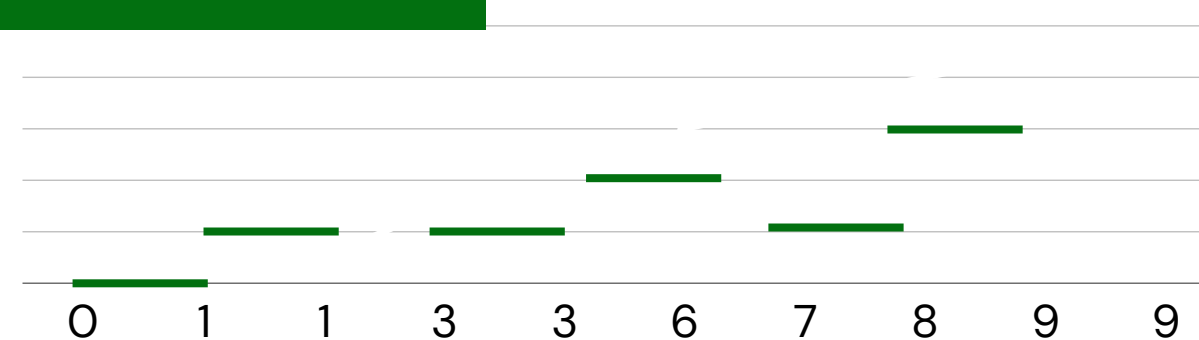
$$T = [0, \infty]$$

- Observaciones ocurren a lo largo de un intervalo
- Índice es un #real

Espacio de Estados (S)

Es el conjunto de todos los valores posibles que pueden tomar las variables aleatorias del proceso

Tiempo discreto



$$T = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Observaciones ocurren en instantes fijos y contables
- Índice pertenece a un conjunto finito o infinito contable

$X(t) / X_n \rightarrow$ Estado del proceso

- **S continuo:** valores reales
- **S discreto:** valores finito o infinito contable

Tipos de procesos estocásticos

Def. Procesos caracterizados por tener un espacio de estados (S) y un índice de tiempo que permite clasificar los procesos según la combinación de si cada uno de sus características son continuas o discretas.

**Proceso
de conteo**

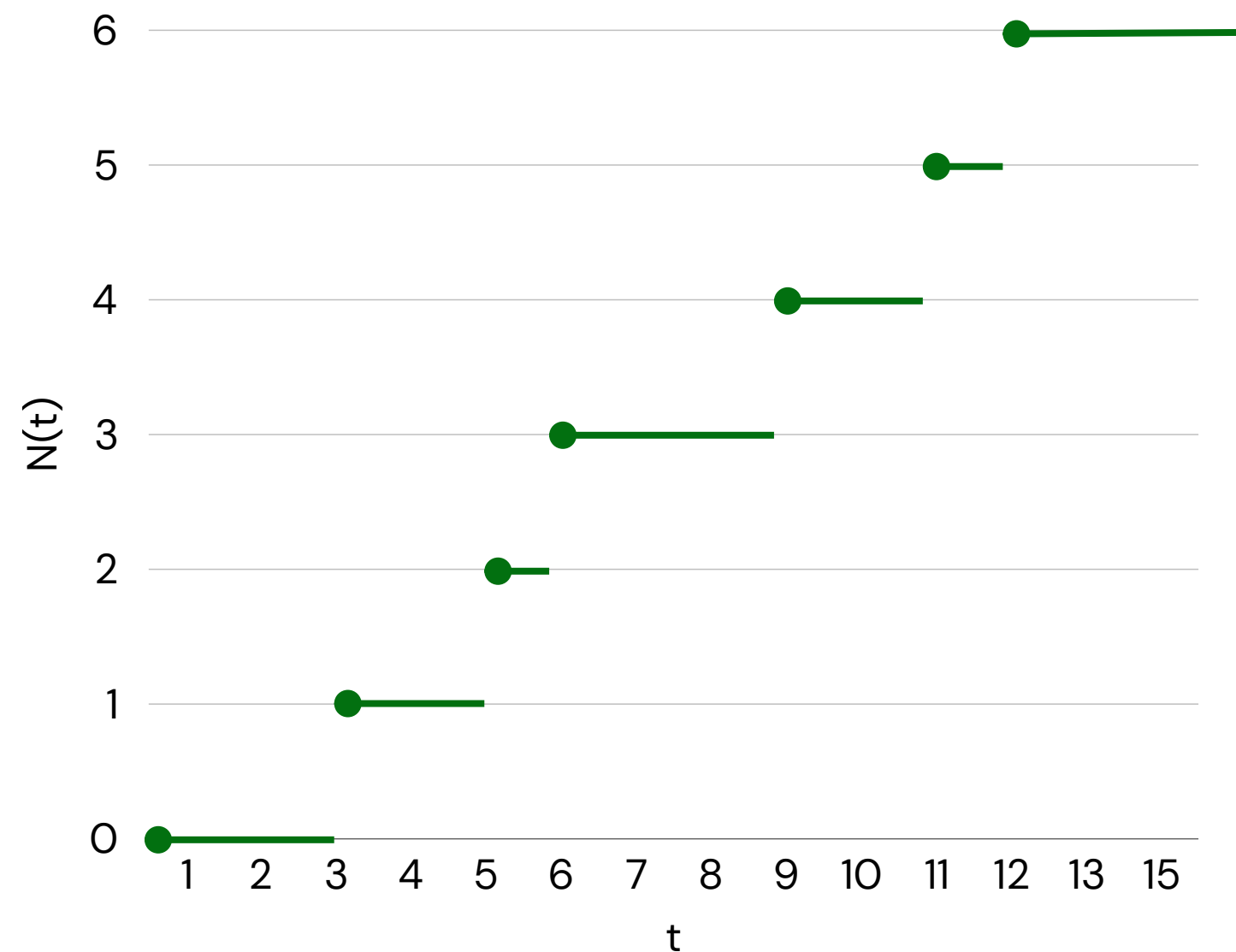
$$N(t), t \geq 0$$

**Tiempo
entre
arribos**

$$T_n, n \geq 0$$

Proceso de conteo

Def. Es un tipo específico de proceso estocástico en tiempo continuo $N(t)$, $t \geq 0$ diseñado para contabilizar el número total de eventos u ocurrencias registradas hasta el tiempo t



- $N(t)$, $t \geq 0 \rightarrow$ Proceso de conteo
- Proceso estocástico
- Tiempo contiuo

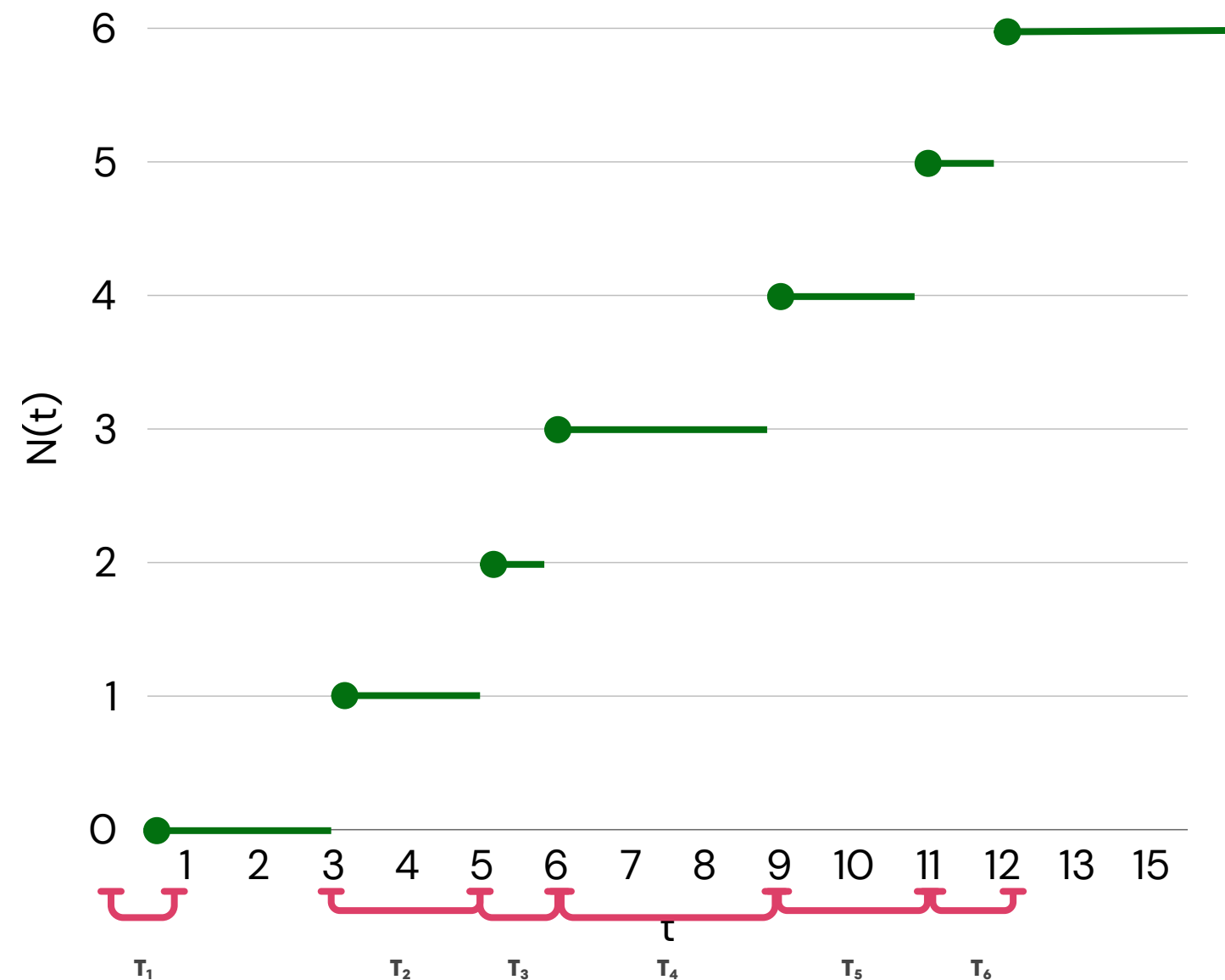
Espacio de Estados (S)

Discretos

$$N(t) \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Tiempo entre arribos

Def. Son las variables aleatorias continuas $A_i = t_i - t_{i-1}$ que denotan la longitud del intervalo de tiempo que transcurre específicamente entre la ocurrencia de dos eventos de arribo consecutivos en un proceso de conteo



- $T_n, n \geq 0$
- Proceso estocástico
- Tiempo discreto

Espacio de Estados (S)

Continuo

$$T_n \in \mathbb{R} \geq 0$$

Ejercicios

Caso	Tiempo	Espacio de estados
Nivel de inventario de una bodega al final de cada día	Discreto	Discreto.
Precio de una acción en la bolsa	Continuo	Continuo
Precio de una acción en la bolsa al inicio de cada hora	Discreto	Continuo
Monto de créditos solicitados en un banco	Continuo	Discreto
Número de agentes activos en un call center	Continuo	Discreto
Número de vehículos esperando en un semáforo cada vez que se actia la luz verde	Discreto	Discreto

Proceso de Poisson

Def. es un caso particular de proceso de conteo en tiempo continuo $N(t)$, $t \geq 0$ que representa el número de eventos u ocurrencias registradas acumulativamente desde el inicio (**tiempo 0**) hasta un tiempo t

Arribos individuales

Los eventos ocurren uno a la vez (no se presentan arribos en lotes o de manera simultánea en un instante infinitesimal de tiempo)

Incrementos independientes

de eventos que ocurren en intervalos no superpuestos son variables aleatorias mutuamente independientes. Cantidad de arribos futuros **no depende del historial del sistema**

Incrementos estacionarios

Distribución del # de arribos en cualquier intervalo de tiempo **depende únicamente de la longitud de dicho intervalo** y no de su ubicación o punto de partida en el tiempo

Características P. Poisson

- VA discreta $N(t) \rightarrow$ conteo de eventos $\sim$ distribución de Poisson
- La tasa promedio de arribo se representa por el parámetro constante $\lambda > 0$
- **Memoryless - FALTA DE MEMORIA** $\rightarrow$ Probabilidad de que ocurra un arribo en un intervalo de tiempo futuro depende exclusivamente de la longitud de dicho intervalo y no de cuánto tiempo haya transcurrido desde el último arribo

$N(t) \rightarrow$ # acumulado arribos en $[0, t] \rightarrow$ Variable discreta $\{0, 1, 2, \dots\}$

$\lambda \rightarrow$ Tasa o intensidad media del proceso

$T_n \text{ ó } A_i \rightarrow$ Tiempo interarribo continuo entre el evento n y $n-1$

$S_n \rightarrow$ Tiempo continuo absoluto en el que se registra n -ésimo arribo

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

Tiempos entre arribos

Def. El tiempo absoluto transcurrido desde el tiempo de referencia inicial $t=0$ hasta que se registra exactamente la ocurrencia de la k -ésima llegada

$T_n \rightarrow$ Tiempo entre el arribo del cliente $n-1$ y el n

$T \rightarrow$ Tiempo entre arribos $\rightarrow T \sim \text{EXP}(\lambda)$

Herramienta matemática
 $\rightarrow$ FGM = $E[e^{tx}] \rightarrow$ v.a.
 Facilitar el cálculo de todos los
 momentos (μ, σ^2) de una dist.
 mediante derivadas sucesivas.
 X Integrales X Sumas complejas

Función de densidad

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

Función Acumulada

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

Función Generadora Momentos

$$M_T(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}, \quad s < \lambda$$

Valor Esperado

$$E[T] = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ej. Tiempos entre arribos

A una sucursal bancaria llegan clientes según un proceso de Poisson con tasa $\lambda=3$ clientes/minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas consecutivas sea mayor a 30 segundos (0.5 min)?

$$T \sim \text{Exponencial}(\lambda)$$

$$P(T > t) = e^{-\lambda t} \rightarrow P(T > 0.5) = e^{-3(0.5)} = e^{-1.5} = 0.223$$

Ej. Tiempos entre arribos

A un centro de emergencias llegan pacientes según Poisson con tasa $\lambda=4$ pacientes/hora. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran menos de 10 minutos ($1/6$ hora) entre dos llegadas consecutivas?

$$T \sim \text{Exponencial}(\lambda)$$

$$P(T < t) \rightarrow P(T < 1/6) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-4 \cdot (1/6)} = 1 - e^{-4/6} = 0.487.$$

Tiempos entre múltiples (k) arribos

Def. Representa los intervalos individuales de tiempo continuos que transcurren de forma consecutiva entre un evento y otro

$S_k \rightarrow$ Tiempo hasta el k -ésimo arribo $S_k = \sum_{i=1}^k T_i$. Suma de Exponenciales

$S_k \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$

Función de densidad

$$f_{S_k}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad t \geq 0$$

Función Acumulada

$$F_{S_k}(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad t \geq 0$$

Función Generadora Momentos

$$M_{S_k}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s} \right)^k, \quad s < \lambda$$

Valor Esperado

Varianza

$$E[S_k] = k/\lambda \quad \text{Var}(S_k) = \frac{k}{\lambda^2}$$

Ej. Tiempos entre múltiples (k) arribos

A un centro de servicio técnico llegan solicitudes según Poisson con tasa $\lambda=1.5$ solicitudes/minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que las primeras 4 solicitudes lleguen dentro del primer minuto? $\rightarrow \lambda t = 1.5 \cdot 1 = 1.5$

$T_4 \rightarrow$ tiempo del 4 arribo $\rightarrow P(T_4 \leq t) = P(N(t) \geq 4)$

$$P(N(t) \geq 4) = 1 - \sum_{i=0}^{4-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} =$$

$$= 1 - \left[e^{-1.5} \cdot \left(\frac{1.5^0}{1} + \frac{1.5^1}{1} + \frac{1.5^2}{2} + \frac{1.5^3}{6} \right) \right] = 1 - 0.9343 = \underline{\underline{0.0656.}}$$

Ej. Tiempos entre múltiples (k) arribos

En una planta llegan pedidos según Poisson con $\lambda=5$ pedidos/hora. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran menos de 45 minutos (0.75 h) para que se completen los primeros 3 arribos?

$$\lambda t = 5 \cdot 0.75 = 3.75$$

$$P(T_3 \leq 0.75) = 1 - \sum_{i=0}^{3-1} e^{-3.75} \frac{(3.75)^i}{i!}$$

$$= 1 - \left[e^{-3.75} \left(\frac{3.75^0}{1} + \frac{3.75^1}{1} + \frac{3.75^2}{2} \right) \right] = 1 - 0.2771$$

$$= \underline{\underline{0.7229}}$$

Probabilidad de observar k arribos en un tiempo t^* (Estacionario)

Def. Para un intervalo de tiempo fijo de duración t , la cantidad de arribos observados sigue una distribución discreta de Poisson, donde el número esperado de eventos en dicho periodo es $\alpha = \lambda t$

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$\text{Valor Esperado} \rightarrow E[N(t)] = \lambda t$$

Ej. Probabilidad de observar k arribos en un tiempo t^*

A una caja registradora llegan clientes según Poisson con $\lambda=6$ clientes/hora. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 4 clientes en un periodo de 30 minutos (0.5 h)?

$$\underline{\lambda t = 3}$$

$$P(N(0.5)=4) = e^{-3} \cdot \frac{3^4}{4!} = \frac{0.0498}{24}$$

$$P(N(0.5)=4) = 0.168$$

Ej. Probabilidad de observar k arribos en un tiempo t^*

A una línea de atención al cliente llegan llamadas según Poisson con $\lambda=1$ llamada/minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 2 llamadas en los primeros 3 minutos?

$$\lambda t = 3$$

$$P(N(3) \geq 2) = 1 - P(N=0) - P(N=1)$$

$$P(N(3) \geq 2) = 1 - \frac{e^{-3} (3)^0}{0!} - \frac{e^{-3} (3)^1}{1!} = 1 - e^{-3} - 3e^{-3}$$
$$= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} = 1 - 4e^{-3} = 0.8009$$