

Propiedades de procesos de Poisson

Juliana Quintana-Rojas

Departamento de Ingeniería Industrial

Universidad de Los Andes

Suma de procesos o combinación

Superposición / Pooling

Def. Es la operación estocástica equivalente a la adición de variables aleatorias o a la unificación de múltiples flujos de eventos independientes en un solo canal

Si tenemos varios procesos de Poisson independientes, al combinarlos o sumarlos, el proceso global resultante sigue siendo un proceso de Poisson unificado

Suma de procesos o combinación

Superposición / Pooling

Suma de procesos o combinación

Superposición / Pooling

Tiempo de ocurrencia mínimo

Tiempo hasta el primer evento en el proceso combinado (T) es el valor mínimo de los primeros tiempos de llegada de cada proceso individual

Suma de procesos o combinación

Superposición / Pooling

Probabilidad de origen del primer arribo

La probabilidad de que el primer evento registrado pertenezca al proceso 1 (es decir, que ocurra antes que el proceso 2) es proporcional a su tasa de llegada individual

Ej. Suma de procesos o combinación

En un hospital, el número de niños nacidos sigue un proceso de Poisson con tasa de 10 por día, y el de niñas sigue un proceso de Poisson independiente con tasa de 9 por día. ¿Cuál es la probabilidad de que el 2 arribo corresponda a una niña ? ¿Cuál es la probabilidad de que sea un niño ?

Ej. Suma de procesos o combinación

Un call center recibe solicitudes por dos canales independientes: llamadas telefónicas, proceso de Poisson con tasa $\lambda_1=3$ por minuto, y chats, proceso de Poisson independiente con tasa $\lambda_2=2$ por minuto.

- a) Calcule la tasa combinada
- b) Probabilidad de exactamente k arribos combinados
- c) Tiempo hasta el primer arribo combinado
- d) Propiedad de separación (thinning): ¿de qué canal es un arribo dado?
- e) Tiempo hasta el k-ésimo arribo combinado.

Descomposición de Procesos o Filtrado

(Thinning / Splitting)

Def. Es la operación inversa a la suma o combinación. Consiste en clasificar o dividir de manera aleatoria e independiente cada evento de un proceso de Poisson original de tasa λ en múltiples subprocesos

Si cada evento del proceso de Poisson original se registra como un evento del subproceso 1 con probabilidad p , o como un evento del subproceso 2 con probabilidad complementaria $1-p$, el proceso original se descompone en dos procesos de conteo independientes

Descomposición de Procesos o Filtrado

(Thinning / Splitting)

Descomposición de Procesos o Filtrado

(Thinning / Splitting)

Ambos procesos resultantes son **procesos de Poisson independientes por derecho propio**, cuyas tasas son proporcionales a las probabilidades de filtrado: el primer subproceso tiene una tasa de λp y el segundo de $\lambda(1-p)$

Independencia mutua

Aunque el proceso original de origen se descompone de forma aleatoria, los procesos de salida son **completamente independientes entre sí**

Descomposición de Procesos o Filtrado

(Thinning / Splitting)

Ambos procesos resultantes son **procesos de Poisson independientes por derecho propio**, cuyas tasas son proporcionales a las probabilidades de filtrado: el primer subproceso tiene una tasa de λp y el segundo de $\lambda(1-p)$

Ej. Descomposición de Procesos o Filtrado

A una fábrica llegan órdenes de producción según un proceso de Poisson con tasa $\lambda=8$ órdenes/hora. Cada orden es, de forma independiente, para producto A con probabilidad $p=0.35$, o para producto B con probabilidad $1-p=0.65$.

- a) Tasas de cada subproceso
- b) Probabilidad de exactamente 2 órdenes de A en 1 hora
- c) Probabilidad de que la primera orden de A tarde más de 30 min (0.5h) en llegar
- d) Probabilidad de al menos 2 órdenes de B en 30 min
- e) Probabilidad conjunta de 3 órdenes de A y 2 de B en la misma hora.

Ej. Descomposición de Procesos o Filtrado

Un sitio web recibe visitas según Poisson con tasa $\lambda=10$ visitas/minuto. Cada visita es humana con probabilidad $p=0.9$, o de un bot con probabilidad $1-p=0.1$, de forma independiente. Las visitas humanas forman $PP(\lambda_h)$ y las de bots $PP(\lambda_b)$, independientes.

- a) Tasas de cada subproceso
- b) Probabilidad de exactamente 5 visitas de bots en 3 minutos
- c) Probabilidad de que la primera visita de un bot tarde más de 2 minutos
- d) Probabilidad de al menos 8 visitas humanas en 1 minuto
- e) Probabilidad conjunta de exactamente 9 visitas humanas y 1 de bot en el mismo minuto