

Propiedades de procesos de Poisson

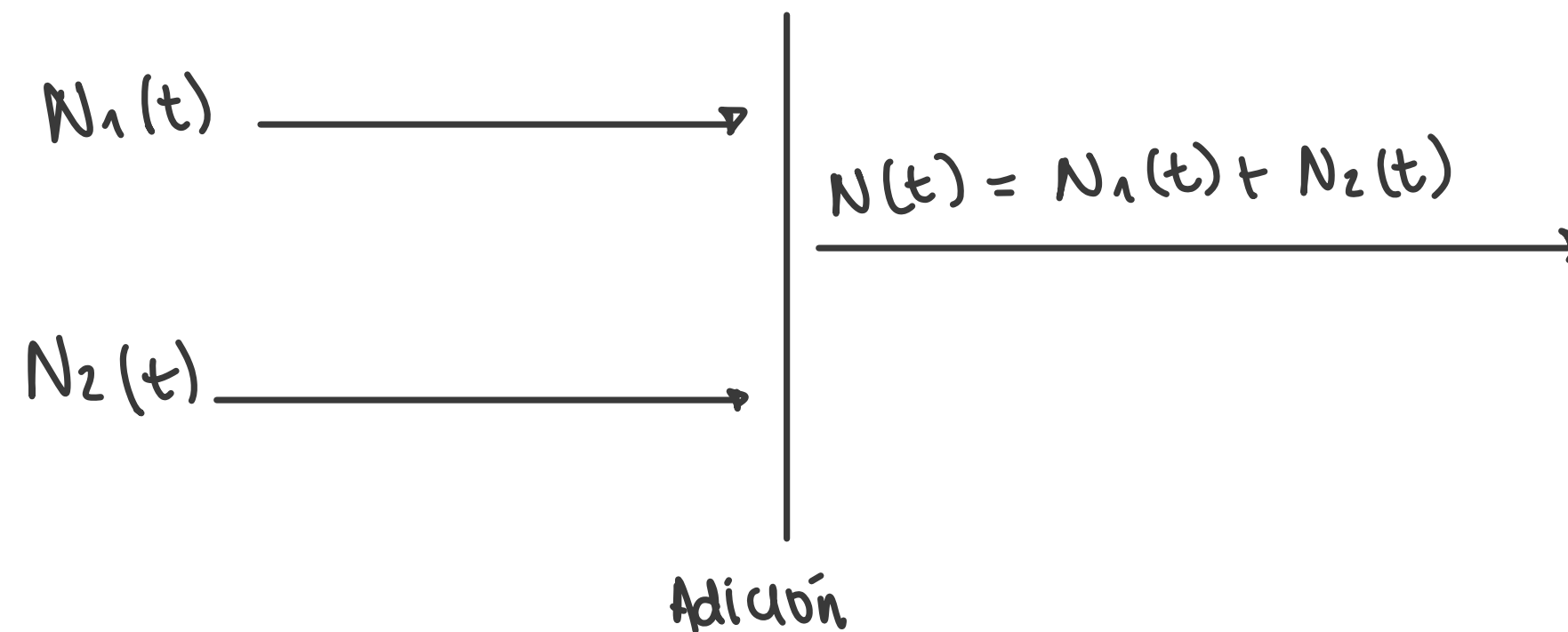
Juliana Quintana-Rojas
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

Suma de procesos o combinación *Superposición / Pooling*

Def. Es la operación estocástica equivalente a la adición de variables aleatorias o a la unificación de múltiples flujos de eventos independientes en un solo canal

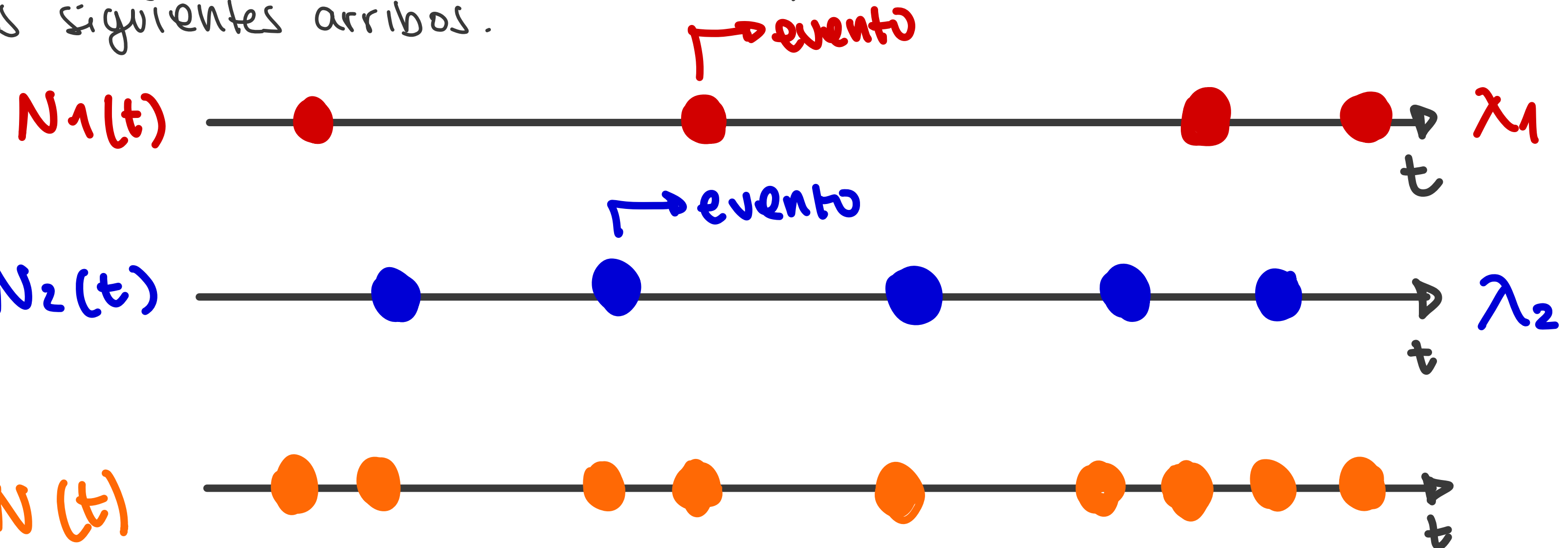
Arribos de clientes 1 $\rightarrow$ Proceso poisson λ_1
Arribos de clientes 2 $\rightarrow$ Proceso poisson λ_2

Si tenemos varios procesos de Poisson independientes, al combinarlos o sumarlos, el proceso global resultante sigue siendo un proceso de Poisson unificado



Suma de procesos o combinación *Superposición / Pooling*

Suponga que la variable N_1 y N_2 siguen un proceso de poisson con los siguientes arribos.



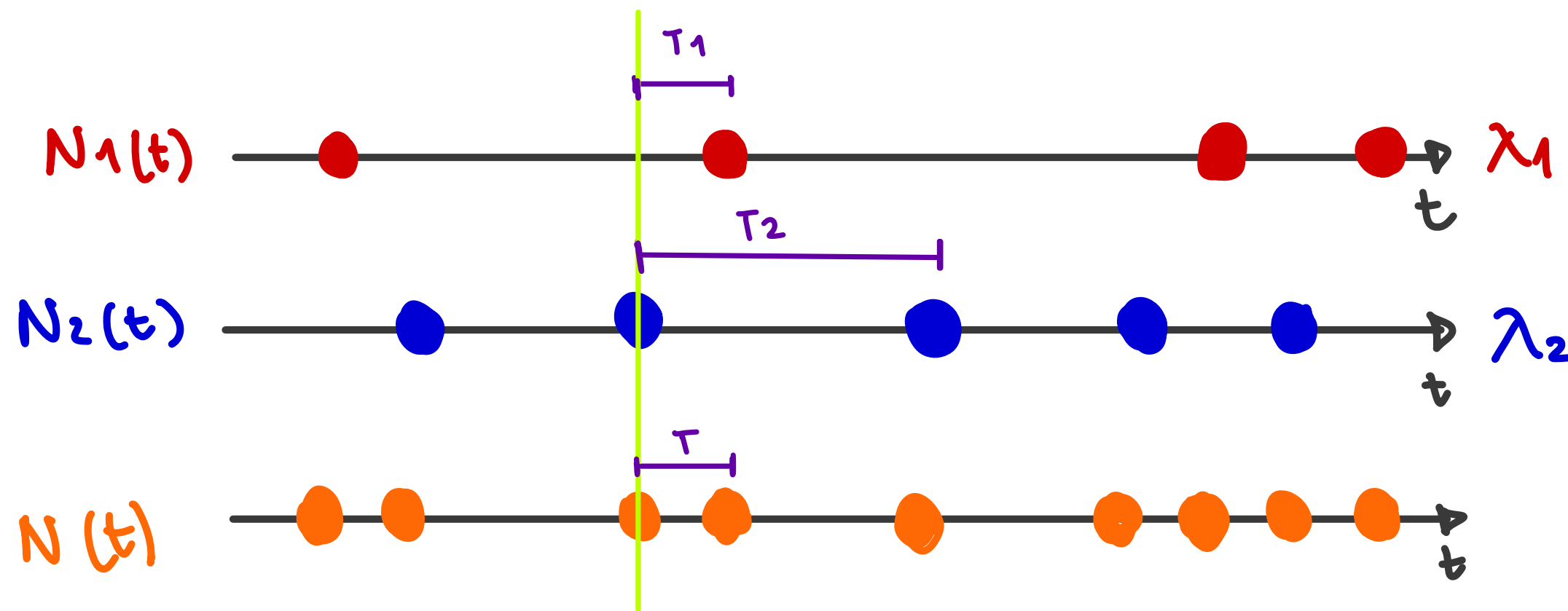
$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Suma de procesos o combinación

Superposición / Pooling

Tiempo de ocurrencia mínimo

Tiempo hasta el primer evento en el proceso combinado (T) es el valor mínimo de los primeros tiempos de llegada de cada proceso individual



$$T = \min(T_1, T_2)$$

$$\bar{T} = T_1$$

$$\begin{aligned} T_1 &\sim \text{Exp}(\lambda_1) \\ T_2 &\sim \text{Exp}(\lambda_2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} T_1 &\sim \text{Exp}(\lambda_1) \\ T_2 &\sim \text{Exp}(\lambda_2) \end{aligned}} \right\} T = \min\{T_1, T_2\}$$

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(\min\{T_1, T_2\} > t) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t) \\ &\rightarrow P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \\ &= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{aligned}$$

$$\rightarrow T \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$N(t) : \text{Proceso de Poisson con } \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Suma de procesos o combinación *Superposición / Pooling*

Probabilidad de origen del primer arribo

La probabilidad de que el primer evento registrado pertenezca al proceso 1 (es decir, que ocurra antes que el proceso 2) es proporcional a su tasa de llegada individual

Si $T_1 \sim \text{Exponencial}(\lambda_1)$
 $T_2 \sim \text{Exponencial}(\lambda_2)$ } independientes : 2 relojes compitiendo

$$\begin{aligned}
 P(T_1 < T_2) &= \int_0^{\infty} P(T_2 > t) \cdot \underbrace{f_{T_1}(t)}_{\substack{\text{Fijar el valor de } T_1 \text{ en} \\ t \text{ (Densidad Probabilidad)}}} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt = \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt
 \end{aligned}$$

→ ¿Qué tan probable es que T_2 se demore más que t ?

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \cancel{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}} dt = \boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$

La probabilidad
 de observar un
 evento de un
 proceso es
 proporcional a
 su tasa

Ej. Suma de procesos o combinación

En un hospital, el número de niños nacidos sigue un proceso de Poisson con tasa de 10 por día, y el de niñas sigue un proceso de Poisson independiente con tasa de 9 por día. ¿Cuál es la probabilidad de que el 2 arribo corresponda a una niña? ¿Cuál es la probabilidad de que sea un niño?

$$\begin{array}{l}
 \text{Niños : 1} \\
 \text{Niñas : 2}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 T_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1 = 10 \text{ n/día}) \\
 T_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2 = 9 \text{ n/día})
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 T \sim \text{Exp}(\lambda = \lambda_1 + \lambda_2) \\
 T \sim \text{Exp}(\lambda = 19 \text{ n/día})
 \end{array}$$

$$P(\text{arribo n es niño}) = P(R_1 < R_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{10}{10 + 9} = 10/19 = 0.5263$$

$$P(\text{2 arribo es niña}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{9}{10 + 9} = 9/19 = 0.473 \rightarrow \text{No depende de la historia}$$

Ej. Suma de procesos o combinación

Un call center recibe solicitudes por dos canales independientes: llamadas telefónicas, proceso de Poisson con tasa $\lambda_1=3$ por minuto, y chats, proceso de Poisson independiente con tasa $\lambda_2=2$ por minuto.

$\hookrightarrow T_2$

a) Calcule la tasa combinada

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \text{ ll/min} + 2 \text{ ch/min} \Rightarrow \lambda = 5 \text{ sol/min}$$

b) Probabilidad de exactamente k arribos combinados $\rightarrow$ 6 solicitudes (cualquiera) en 2 minutos

$$\lambda t = 5 \cdot 2 = 10 \rightarrow P(N(2) = 6) = e^{-10} \cdot \frac{10^6}{6!} = 0.0631$$

c) Tiempo hasta el primer arribo combinado.

Probabilidad c/ q solicitud antes de 15 segundos $\rightarrow P(T < 0.25) = 1 - e^{-5 \cdot 0.25} = 1 - e^{-1.25} = 0.7135$

d) Propiedad de separación (thinning): ¿de qué canal es un arribo dado?

Dado que ocurrió una solicitud (no importa cual) cual es la probabilidad de que sea telefónica $\rightarrow P(\text{canal A} | \text{arribo}) = \lambda_1 / \lambda = \frac{3}{5} = 0.6$

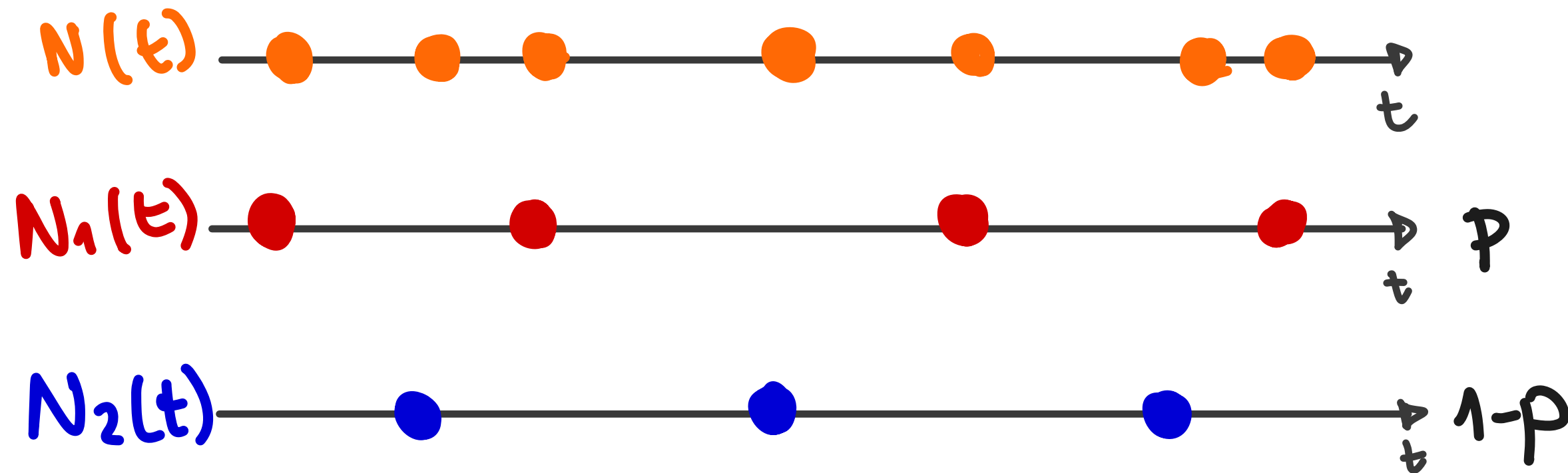
e) Tiempo hasta el k-ésimo arribo combinado.

Probabilidad de que los primeros 3 solicitudes combinadas lleguen dentro del 1^{er} minuto $\rightarrow P(T_3 \leq 1) = P(N(1) \geq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{2} e^{-5} \cdot \frac{5^i}{i!} = 0.8753$

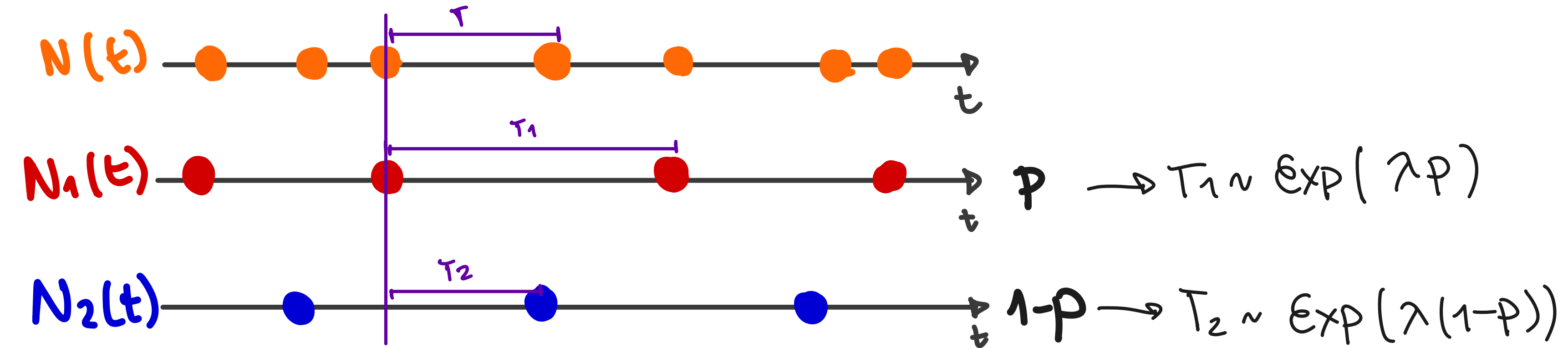
Descomposición de Procesos o Filtrado *(Thinning / Splitting)*

Def. Es la operación inversa a la suma o combinación. Consiste en clasificar o dividir de manera aleatoria e independiente cada evento de un proceso de Poisson original de tasa λ en múltiples subprocesos

Si cada evento del proceso de Poisson original se registra como un evento del subproceso 1 con probabilidad p , o como un evento del subproceso 2 con probabilidad complementaria $1-p$, el proceso original se descompone en dos procesos de conteo independientes



Descomposición de Procesos o Filtrado *(Thinning / Splitting)*



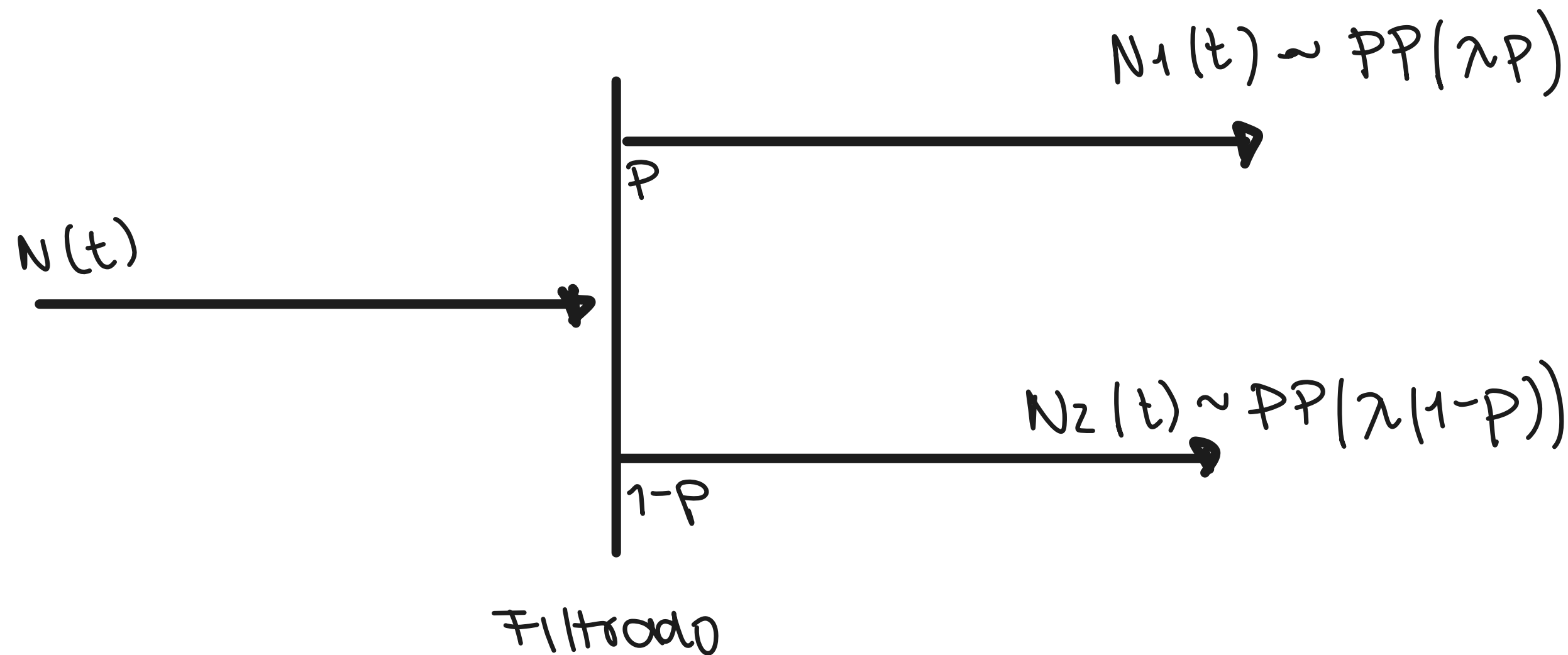
Proceso POISSON (PP)

$$N_1(t) \sim \text{PP}(\lambda p)$$

$$N_2(t) \sim \text{PP}(\lambda (1-p))$$

Descomposición de Procesos o Filtrado *(Thinning / Splitting)*

Ambos procesos resultantes son **procesos de Poisson independientes por derecho propio**, cuyas tasas son proporcionales a las probabilidades de filtrado: el primer subproceso tiene una tasa de λp y el segundo de $\lambda(1-p)$



Independencia mutua

Aunque el proceso original de origen se descompone de forma aleatoria, los procesos de salida son **completamente independientes entre sí**

Tasas son proporcionales
 a las probabilidades
 de filtrado

Ej. Descomposición de Procesos o Filtrado

A una fábrica llegan órdenes de producción según un proceso de Poisson con tasa $\lambda=8$ órdenes/hora. Cada orden es, de forma independiente, para producto A con probabilidad $p=0.35$, o para producto B con probabilidad $1-p=0.65$.

a) Tasas de cada subproceso

$$\lambda_A = \lambda \cdot p_A = 8 \cdot 0.35 = 2.8 \text{ / hora} \quad | \quad \lambda_B = \lambda \cdot p_B = 8 \cdot 0.65 = 5.2 \text{ / hora}$$

b) Probabilidad de exactamente 2 órdenes de A en 1 hora $\rightarrow$ k arribos en un t^*

$$P(N_A = 2) = e^{-2.8} \cdot \frac{2.8^2}{2!} = 0.2384$$

c) Probabilidad de que la primera orden de A tarde más de 30 min (0.5h) en llegar $\rightarrow$ tiempo entre arribos.

$$P(T_A > 0.5) = e^{-\lambda_A \cdot t} = e^{-2.8 \cdot 0.5} = 0.2466$$

d) Probabilidad de al menos 2 órdenes de B en 30 min $\rightarrow$ k arribos, proceso Poisson en un t^*

$$\lambda_t = 0.5 \cdot 5.2 = 2.6 \quad | \quad P(N_B(0.5) \geq 2) = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - \left[\frac{2.6^0 \cdot e^{-2.6}}{0!} + \frac{2.6^1 \cdot e^{-2.6}}{1!} \right] = 0.7326.$$

e) Probabilidad conjunta de 3 órdenes de A y 2 de B en la misma hora.

$$P(N_A = 3, N_B = 2) = P(N_A = 3) \cdot P(N_B = 2) = \left[e^{-2.8} \cdot \frac{2.8^3}{3!} \right] \left[e^{-5.2} \cdot \frac{5.2^2}{2!} \right] = 0.22 (0.075)$$

Ej. Descomposición de Procesos o Filtrado

Un sitio web recibe visitas según Poisson con tasa $\lambda=10$ visitas/minuto. Cada visita es humana con probabilidad $p=0.9$, o de un bot con probabilidad $1-p=0.1$, de forma independiente. Las visitas humanas forman $PP(\lambda_h)$ y las de bots $PP(\lambda_b)$, independientes.

a) Tasas de cada subproceso

$$\lambda_h = 9/\text{min} \quad \lambda_b = 1/\text{min}$$

b) Probabilidad de exactamente 5 visitas de bots en 3 minutos

$$P(N_B = 5) = e^{-3} \cdot \frac{3^5}{5!} = 0.1008$$

c) Probabilidad de que la primera visita de un bot tarde más de 2 minutos

$$P(T_{\text{Bot}} > 2) = e^{-1 \cdot 2} = 0.1353$$

d) Probabilidad de al menos 8 visitas humanas en 1 minuto

$$\lambda_h \cdot t = 9 \mid P(N_h \geq 8) = 1 - \sum_{i=0}^{7} e^{-9} \cdot \frac{9^i}{i!} = 0.67$$

e) Probabilidad conjunta de exactamente 9 visitas humanas y 1 de bot en el mismo minuto

$$P(N_h = 9) \cdot P(N_b = 1) = 0.1318 \cdot 0.3679 = 0.0485$$