

Cadenas de Markov en Tiempo Continuo (CMTC)

Juliana Quintana-Rojas
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

Cadenas Markov en Tiempo Continuo

Def. Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$, con espacio de estados discretos $\mathbf{S}$, es una Cadena de Markov de Tiempo Continuo si satisface la **Propiedad de Markov** para todo $t, s \geq 0$ y estados $i, j \in \mathbf{S}$

Dado el estado presente del sistema en el tiempo s , la evolución futura del proceso es probabilísticamente independiente de todo su historial pasado.

Conceptos clave y partes de CMTC

Estado del Sistema → **$X(t)$**

Espacio de Estados → **S**

$X(t)$ representa la variable aleatoria del estado del sistema al tiempo continuo t , el cual toma valores en un conjunto contable S

Homogeneidad temporal

La CMTC es homogénea en el tiempo si la probabilidad de transición condicional no depende del instante **s** inicial, sino únicamente de la longitud del intervalo **t**

Tiempo de Permanencia o Estancia (Sojourn Time)

Cuando la cadena entra a un estado i , permanece en él durante un tiempo aleatorio antes de realizar una transición a otro estado



Conceptos clave y partes de CMTC

Cadena Discreta Embebida (Embedded DTMC)

Cuando el proceso abandona el estado i , salta al estado $j \neq i$ con una probabilidad de transición discreta $p_{i,j}$ donde $p_{i,i} = 0$, independientemente del tiempo que permaneció en el estado i

Eventos Desencadenantes (Triggering Events)

Las transiciones entre estados ocurren por la competencia entre eventos independientes en el estado i (por ejemplo, fallas o reparaciones) cuyos tiempos de ocurrencia son exponenciales

Tasas de Transición

Para dos estados distintos $i \neq j$, se define la tasa de transición $q_{i,j}$ (o $r_{i,j}$) como la tasa a la cual el sistema conmuta del estado i al estado j

Si existen m eventos independientes en el estado i que llevan al estado j con tiempos de ocurrencia exponenciales de tasas $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ la tasa de transición combinada es

Matriz generadora (Q)

Diagrama de Tasas (Rate diagram)

Ej. Máquina de Dos Estados (Operativa / En Reparación)

Una máquina alterna continuamente entre estar operativa (Estado 1) y estar averiada en proceso de reparación (Estado 0). Cuando la máquina está funcionando, el tiempo hasta que ocurre una falla sigue una distribución exponencial con tasa $\lambda > 0$ (tiempo medio de vida $1/\lambda$). Una vez que falla, es atendida inmediatamente por un técnico de reparación; el tiempo necesario para reparar la máquina sigue una distribución exponencial independiente con tasa $\mu > 0$ (tiempo medio de reparación $1/\mu$). Una vez concluida la reparación, la máquina queda como nueva y vuelve a funcionar.

Ej. Taller de 2 Máquinas y 2 Técnicos de Reparación

Un taller industrial dispone de 2 máquinas idénticas e independientes. Cada máquina en funcionamiento opera durante un tiempo exponencial con tasa de falla individual $\lambda > 0$ antes de averiarse. El taller cuenta con 2 técnicos de reparación dedicados. Cuando una o ambas máquinas fallan, cada máquina averiada es atendida de manera individual por un técnico. El tiempo de reparación de cada máquina sigue una distribución exponencial independiente con tasa $\mu > 0$. Al ser reparada, la máquina retorna inmediatamente a producción.