

Cadenas de Markov en Tiempo Continuo (CMTC)

Juliana Quintana-Rojas

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

Cadenas Markov en Tiempo Continuo

Def. Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$, con espacio de estados discretos S , es una Cadena de Markov de Tiempo Continuo si satisface la **Propiedad de Markov** para todo $t, s \geq 0$ y estados $i, j \in S$

$$P(X(s+t) = j \mid X(s) = i, X(u), 0 \leq u \leq s) = P(X(s+t) = j \mid X(s) = i)$$

Diagram illustrating the Markov property for a continuous-time Markov chain. The equation shows the probability of being in state j at time $s+t$ given the state i at time s and the entire history up to time s . The right side shows that this probability depends only on the state i at time s .

Annotations for the equation:

- $X(s+t) = j$: Estado del sistema en un instante $(s+t)$ da
- $s+t$: instante futuro $+t > 0$ {cantidad tiempo que transcurrirá hacia adelante}
- $X(s) = i$: Para evento sistema en el estado i en el presente (s)
- $X(u), 0 \leq u \leq s$: Todo el historial pasado Estados que ocupó en los momentos u desde inicio o hasta antes de llegar a s
- $X(s+t) = j$: Sistema en estado j en tiempo futuro $(s+t)$
- $X(s) = i$: Sistema en estado i en tiempo presente (s)

Additional annotation: $X(s+t) = j \rightarrow$ Para un evento el sistema en el estado j futuro $(s+t)$

Dado el estado presente del sistema en el tiempo s , la evolución futura del proceso es probabilísticamente independiente de todo su historial pasado.

Cadenas Markov en Tiempo Continuo

Def. Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$, con espacio de estados discretos S , es una Cadena de Markov de Tiempo Continuo si satisface la **Propiedad de Markov** para todo $t, s \geq 0$ y estados $i, j \in S$

$$P(X(s+t)=j \mid X(s)=i, X(u), 0 \leq u < s) = P(X(t)=j \mid X(0)=i)$$

Probabilidad de que el sistema este en estado j en el futuro $(s+t)$, dado que ahora (s) esta en el estado (i) y conociendo toda la trayectoria previa que tuvo el sistema antes de ahora $(0 \leq u < s)$

$X(s+t)=j \rightarrow$ Futuro ¿Dónde estará el sistema dentro de un tiempo t ?
 $X(s)=i \rightarrow$ Presente ¿Dónde esta el sistema ahora?
 $X(u), 0 \leq u < s \rightarrow$ Pasado ¿Que camino recorrió el sistema antes de ahora?
 = (Igualdad) $\rightarrow$ Conocer el pasado no cambia la probabilidad del futuro si ya conocemos el presente

Dado el estado presente del sistema en el tiempo s , la evolución futura del proceso es probabilísticamente independiente de todo su historial pasado.

Conceptos clave y partes de CMTC

Estado del Sistema $\rightarrow X(t) \rightarrow$ *estado en un tiempo dado*
Espacio de Estados $\rightarrow S \rightarrow$ *espacios estados (ahora)*

$X(t)$ representa la variable aleatoria del estado del sistema al tiempo continuo t , el cual toma valores en un conjunto contable S

$X(s+t) \rightarrow$ Estado sistema instante futuro absoluto dado el estado i en el instante s

$X(t) \rightarrow$ Estado del sistema al cabo de una duración t desplazando el reloj para que el momento de origen sea $t=0$

$P_{ij}(t) \rightarrow$ Probabilidad de ir a un estado j en un intervalo t

Tiempo de Permanencia o Estancia (Sojourn Time)

Cuando la cadena entra a un estado i , permanece en él durante un tiempo aleatorio antes de realizar una transición a otro estado

$\gamma \sim \text{Exp}(q_i)$ *Tiempo de permanencia en el estado (VA)*

Homogeneidad temporal

La CMTC es homogénea en el tiempo si la probabilidad de transición condicional no depende del instante s inicial, sino únicamente de la longitud del intervalo t

$$P(X(s+t)=j | X(s)=i) = P(X(t)=j | X(0)=i) = P_{ij}(t)$$

$$\forall 1 \leq i, j \leq N \text{ \{Finite state space } \{1, 2, 3, \dots, N\}$$

Propiedad falta de memoria es la que garantiza la prop. de Markov en tiempo continuo

Tasas de Transición

Para dos estados distintos $i \neq j$, se define la tasa de transición $q_{i,j}$ (o $r_{i,j}$) como la tasa a la cual el sistema conmuta del estado i al estado j

↓ donde $q_{i,j}$: tasa de transición instantánea del estado $i \rightarrow j$

TASA TOTAL SALIDA (q_i)

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j} \quad \text{tasa de todas las vías de salidas posibles}$$

Si existen m eventos independientes en el estado i que llevan al estado j con tiempos de ocurrencia exponenciales de tasas $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ la tasa de transición combinada es

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad de permanecer + de un tiempo } y \\ \hline P(Y > y) = e^{-q_i \cdot y} \end{array} \right.$$

$Y_i \sim \text{Exp}(q_i)$: TIEMPO permanencia
TIEMPO PROMEDIO ESTANCIA

$$E[Y_i] = \frac{1}{q_i}$$

Función Densidad Probabilidad

$$f_Y(y) = q_i e^{-q_i y}, \text{ para } y \geq 0$$

Función distribución acumulada

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-q_i y}, \text{ para } y \geq 0$$

Propiedad

falta

Memoria

$$P(Y > (s+t) | Y > s) = P(Y > t) \\ \hookrightarrow = e^{-q_i \cdot t}$$

Conceptos clave y partes de CMTC

Cadena Discreta Embebida (Embedded DTMC)

Cuando el proceso abandona el estado i , salta al estado $j \neq i$ con una probabilidad de transición discreta p_{ij} donde $p_{ii} = 0$, independientemente del tiempo que permaneció en el estado i

→ Secuencia de estados $X_n, n \geq 0$ que observa el sistema únicamente en los instantes que ocurre una transición
 $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \dots$ Ignorando por completo la duración tiempo permanencia continuo

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_{k \neq i} q_{i,k}} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{i,i} = 0 \\ \text{cadena embebida} \end{array} \right.$$

↓
 probabilidad transición de un paro

↳ evento potencial

Eventos Desencadenantes (Triggering Events)

Las transiciones entre estados ocurren por la competencia entre eventos independientes en el estado i (por ejemplo, fallas o reparaciones) cuyos tiempos de ocurrencia son exponenciales

Evento potencial K que lleva al estado j tiene un tiempo de ocurrencia asociado

$$T_{ij} \sim \text{Exp}(q_{ij})$$

↓
 1er evento llega a completarse = $Y = \min(T_{ij})$
 Mínimo entre todos los tiempos de los eventos de competencia

↳ Desencadena el salto del sistema y determina el nuevo salto alcanzado

Considere un sistema con los siguientes estados
 $S = \{0, 1\}$ donde $X(t) \rightarrow$ representa # máquinas operativas

Estado 1 : La máquina está funcionando
 El tiempo hasta que falle es : $T_{falla} \sim \text{Exp}(\lambda)$

Estado 0 : La máquina está averiada.
 El tiempo hasta que el técnico la repare : $T_{rep} \sim \text{Exp}(\mu)$

Análisis estado 1

1. Evento desencadenante : Duración de una falla mecánica a una tasa λ

2. Tasa de salida (q_1) : Solo hay un evento posible para salir del estado 1
 $q_1 = q_{1,0} = \lambda$

3. Tiempo permanencia (γ_1) : Tiempo permanece operando $\gamma_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$

* Duración media servicio $\Rightarrow E[\gamma_1] = 1/\lambda$

4. Cadena discreta embebida : Al fallar la mq. la prob. saltar Estado 0

$$P_{1,0} = \frac{q_{1,0}}{q_1} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

Breve Demostración

$$P_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{q_i}$$

$$\rightarrow q_{i,j} = P_{i,j} \cdot q_i$$

→ tasa total salida

sumar todos los estados de llegada posibles $i \neq j$

$$\sum_{j \neq i} q_{i,j} = \sum_{j \neq i} (q_i \cdot P_{i,j}) = q_i \sum_{j \neq i} P_{i,j} = q_i (1) = q_i$$

Estados $\rightarrow S = \{0, 1, 2\}$

1: Operativo

0: Falla hardware

2: Falla software

servidor $\rightarrow S (i=1)$: Operative

Puede salir por 2 causas

Independientes

a. Salida al estado $j=0$

$$q_{1,0} = 3 \text{ falla/mes}$$

b. Salida al estado $j=2$

$$q_{1,2} = 1 \text{ falla/mes}$$

Tasa total salida (q_1)

$$q_1 = q_{1,0} + q_{1,2} = 3 + 1 = 4 \text{ fallas/mes}$$

Probabilidades cadena emb

$$P_{1,0} = \frac{q_{1,0}}{q_1} = 3/4 = 0.75$$

$$P_{1,2} = q_{1,2}/q_1 = 1/4 = 0.25$$

Tiempo promedio permanencia estado 1

$$E[Y_1] = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{4} \text{ mes} = 7.5 \text{ días}$$

Matriz generadora (Q)

→ CMTC

Matriz tasas infinitesimales | generador infinitesimal

CMTC con $S = \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow Q = [q_{i,j}]_{i,j \in S}$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & q_{0,2} \\ q_{1,0} & q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,0} & q_{2,1} & q_{2,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,0} & \dots & q_{n,2} \end{bmatrix}$$

↳ Construye combinando tasas de transición individuales y la tasa total salida de cada estado

A) $i \neq j$ | Elementos fuera de diagonal

$q_{i,j} \geq 0$ = Tasa instantánea de transición del estado $i \rightarrow j$

→ Mide frecuencia o rapidez con la que el sistema cambia de $i \rightarrow j$ / una tiempo

Matriz generadora (Q)

B) $i=j$ | Elementos diagonal principal

$q_{i,i} = -q_i \rightarrow$ Negativo de la tasa total de salida del estado i

$$q_{i,i} = - \sum_{i \neq j} q_{i,j}$$

Propiedad Fundamental fila

Suma de todos los elementos de c.q fila es estrictamente 0

$$\sum_{j \in S} q_{i,j} = 0 \quad \forall i \in S$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} q_{i,j} &= q_{i,i} + \sum_{j \neq i} q_{i,j} \\ &= (-q_i) + q_i = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

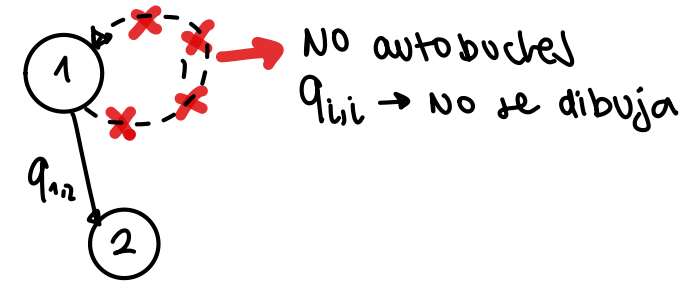
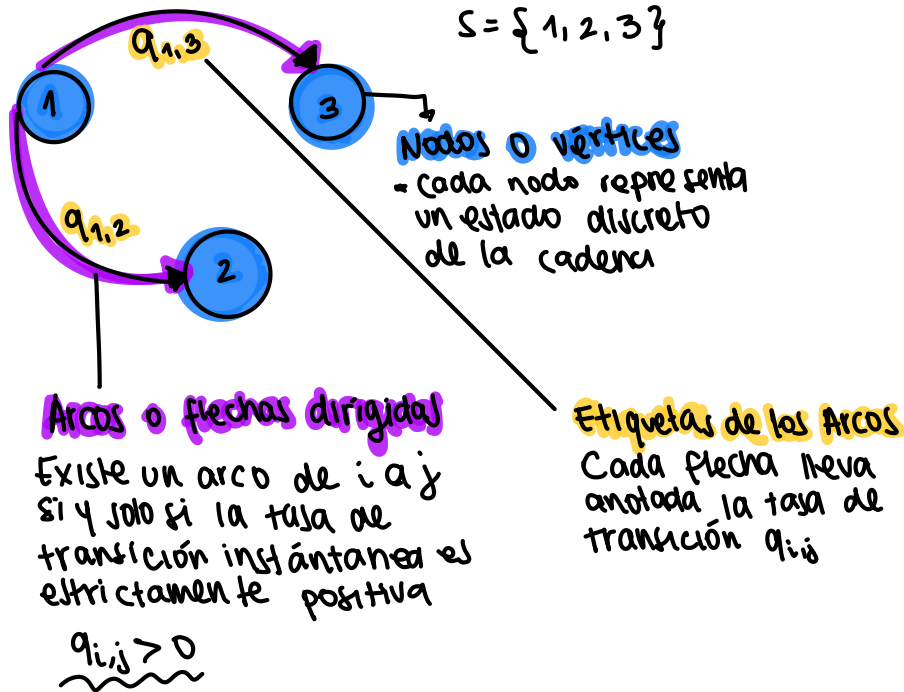
Matriz tasa (R) $\rightarrow$ Tasa de transición entre estados distintos $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & t \\ a & c & 0 \end{bmatrix}$ 0 en la diagonal

Q es idéntica a R, pero en lugar de 0 en la diagonal es $-q_i$ $\begin{bmatrix} -q_i & a & b \\ c & -q_i & t \\ a & c & -q_i \end{bmatrix}$

Daigramas de Tasas (Rate diagram)

Representación gráfica mediante **grafo dirigido** de la estructura dinámica del CMTc

↳ Visualizar como el sistema conmuta entre estados y a qué velocidad ocurre la transición



Consistencia con Q : El diagrama tiene la misma información que los elementos fuera de la diagonal Q

La suma de las tasas de salida es igual a la tasa total de salida $q_i = \sum_j q_{i,j}$

Ej. Máquina de Dos Estados (Operativa / En Reparación)

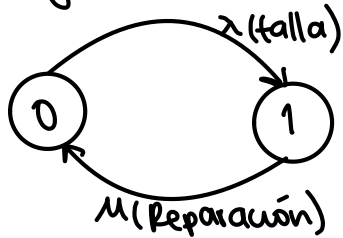
1. $X(t) \rightarrow$ Estado operativo de la máquina

2. Espacio de estados $\Rightarrow S = \{0, 1\}$

$S(1) = \text{Up} - \text{Funcionando}$

$S(2) = \text{Down} - \text{En reparación}$

3. Diagrama de tasas



4. Tasas de transición

Estado 1 al 0: $q_{1,0} = \mu$

Estado 0 al 1: $q_{0,1} = \lambda$

Tasa total salida estado 1: $q_1 = \lambda \Rightarrow q_{1,1} = -\lambda$

Tasa total salida estado 0: $q_0 = \mu \Rightarrow q_{0,0} = -\mu$

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\mu & \lambda \\ \mu & -\lambda \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ej. Máquina de Dos Estados (Operativa / En Reparación)

5. tiempos de permanencia

Estado 1

$$E[Y_1] = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \text{Tiempo que la máquina dura operando en cada ciclo}$$

Estado 0

$$E[Y_0] = \frac{1}{q_0} = \frac{1}{\mu} \rightarrow \text{Tiempo medio que la máquina pasa en taller cada ciclo}$$

6. Probabilidades salto cadena embebida.

$$p_{1,0} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1 \rightarrow \text{Salir del servicio obligatoriamente pasa al taller.}$$

$$p_{0,1} = \frac{\mu}{\mu} = 1 \rightarrow \text{Terminar la reparación } \downarrow \text{ máquina pasa a servicio}$$

Ej. Taller de 2 Máquinas y 2 Técnicos de Reparación

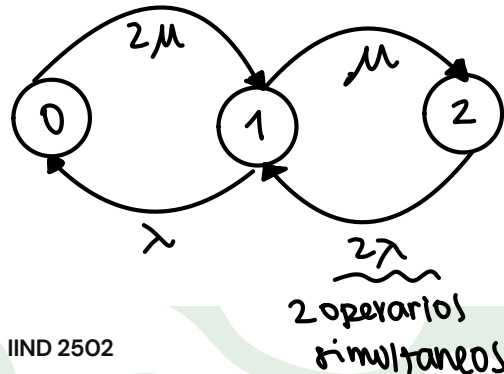
1. Variable de estado $X(t)$: # máquinas en funcionamiento
2. Espacio de estados: $S = \{0, 1, 2\}$

Estado 0: 0 máquinas funcionando, 2 reparación (atendidas simultáneamente)

Estado 1: 1 máquina funcionando, 1 reparación (atendida por 2 técnicos)

Estado 2: 2 máquinas funcionando, 0 reparación

3. Diagrama de tasas



4. Determinación de transiciones

- Estado 0 (0 fun, 2 reparación con 2 técnicos)

$$q_{0,1} = \mu + \mu = 2\mu \quad | \quad q_0 = 2\mu \Rightarrow q_{0,0} = -2\mu$$

- Estado 1

$$\left. \begin{array}{l} q_{1,0} = \lambda \\ q_{1,2} = \mu \end{array} \right\} q_1 = \lambda + \mu$$

$$\Downarrow q_{1,1} = -(\lambda + \mu)$$

- Estado 2

$$q_{2,1} = \lambda + \lambda = 2\lambda$$

$$q_2 = 2\lambda \Rightarrow q_{2,2} = -2\lambda$$

Ej. Taller de 2 Máquinas y 2 Técnicos de Reparación

5. Matriz Generadora

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2\mu & 2\mu & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu)\mu & \\ 0 & 2\lambda & -2\lambda \end{bmatrix} \end{matrix}$$

6. Tiempos medios permanencia

$$E[Y_0] = \frac{1}{q_0} = \frac{1}{2\mu}$$

$$E[Y_1] = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{\lambda+\mu}$$

$$E[Y_2] = \frac{1}{q_2} = \frac{1}{2\lambda}$$

7. Probabilidades sobre cadena discreta embebida

$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

Estado 0

$$P_{0,1} = \frac{2\mu}{2\mu} = 1$$

Estado 1

$$P_{1,0} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$P_{1,2} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Estado 2

$$P_{2,1} = \frac{2\lambda}{2\lambda} = 1$$

