

Modelado de CMTC

Juliana Quintana-Rojas

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

Espacio de Estados (S)

Es el conjunto contable de todos los valores numéricos o situaciones posibles que puede tomar la variable aleatoria $\mathbf{X(t)}$ que describe el estado del sistema en cualquier instante continuo de tiempo $t \geq 0$

Importancia

Define la dimensión del sistema y el tamaño de los vectores de estado y de la matriz generadora Q

Vector de condiciones iniciales ($\mathbf{a}$)

Es un vector fila de probabilidades

$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_i]_{i \in S}$ que especifica la distribución de probabilidad de que el sistema se encuentre en cada uno de los estados posibles al instante inicial $t = 0$

Importancia

Determina el punto de partida del análisis estocástico y es indispensable para evaluar la solución de la distribución transitoria

Vector de Probabilidades de Estado / Distribución Transitoria ($\mathbf{p}(t)$)

Es el vector fila $\mathbf{p}(t) = [\mathbf{p}_j(t)]_{j \in S}$ que representa la distribución marginal de probabilidad del estado del sistema en un instante continuo futuro $t > 0$

Importancia

Define la dimensión del sistema y el tamaño de los vectores de estado y de la matriz generadora $\mathbf{Q}$

Distribución Estacionaria o de Equilibrio (π)

Es el vector de probabilidades límite de largo plazo $\pi(t) = [\pi_j(t)]_{j \in S}$ hacia el cual convergen las probabilidades de estado a medida que $t \rightarrow \infty$, independientemente de la condición inicial (si la cadena es irreducible y positiva recurrente)

Propiedad Invarianza

Cadena irreducible

Es posible pasar desde cualquier estado i hasta cualquier otro estado j en un número finito de pasos (o en un tiempo finito)

- El sistema puede navegar por todo el espacio de estados

Recurrencia

Recurrencia:

La probabilidad de regresar a él en algún momento futuro (habiendo partido de él) es exactamente igual a 1

Positiva Recurrencia:

El tiempo promedio esperado de primer retorno a ese estado es estrictamente finito

Nula Recurrencia:

La probabilidad de retornar también es **1**, pero el tiempo medio esperado de retorno es infinito

PROPIEDAD EN CADENAS FINITAS: CUALQUIER CADENA DE MARKOV **IRREDUCIBLE** QUE TENGA UN NÚMERO FINITO DE ESTADOS ES **SIEMPRE POSITIVAMENTE RECURRENTE**

Irreducible + Positivamente Recurrente: El sistema visitará todos y cada uno de sus estados infinitas veces en el largo plazo, y el tiempo promedio que tarda en regresar a cualquier estado siempre es finito

Ejercicio 1. Planta embotelladora

Fuente

Gayathri, M. (2025). "A Continuous-Time Markov Chain Approach for Availability Analysis of a Repairable Engineering System". *International Journal for Multidisciplinary Research*

Contexto paper

Se modela una planta embotelladora completa (8 subsistemas: alimentación de botellas, lavado, llenado, tapado, etiquetado, inspección, empaque y transportador) como una CTMC de 32 estados, y usa las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov hacia adelante para obtener la disponibilidad del sistema.

Simplificación para la clase: se aísla un solo subsistema, la Unidad de Lavado, que tiene una unidad principal operando y una unidad de respaldo en espera fría (cold standby). Este subsistema captura la idea central del paper (redundancia + reparación) sin la complejidad de 32 estados.

Descripción del sistema

Una planta embotelladora tiene una unidad de lavado con una máquina principal y una de respaldo. Mientras la principal funciona, la de respaldo permanece apagada. Si la principal falla, la de respaldo entra a operar de inmediato (en capacidad reducida) mientras se repara la principal. Si la de respaldo también falla antes de que la principal quede reparada, el subsistema queda completamente fuera de servicio. Una unidad reparada queda como nueva.

Datos / parámetros

- $\lambda_1 = 0.02$ fallas/día — vida media de la unidad principal: 50 días.
- $\lambda_2 = 0.05$ fallas/día — vida media de la unidad de respaldo bajo uso: 20 días.
- $\mu_1 = 1$ reparación/día — tiempo medio de reparación de la principal: 1 día
- $\mu_2 = 0.5$ reparaciones/día — tiempo medio de reparación cuando ambas fallaron: 2 días.

Ejercicio 1. Planta embotelladora - Subsistemas de lavado (B) y llenado (C)

Fuente

Gayathri, M. (2025). "A Continuous-Time Markov Chain Approach for Availability Analysis of a Repairable Engineering System". *International Journal for Multidisciplinary Research*

Contexto paper

Se modela una planta embotelladora completa (8 subsistemas: alimentación de botellas, lavado, llenado, tapado, etiquetado, inspección, empaque y transportador) como una CTMC de 32 estados, y usa las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov hacia adelante para obtener la disponibilidad del sistema.

Extensión para la clase: en vez de aislar un solo subsistema, aquí se combinan dos: lavado (B) y llenado (C), para mostrar cómo el modelo completo de 32 estados del paper se construye realmente: combinando las variables de estado de cada subsistema.

Descripción del sistema

La línea de la planta necesita que ambos subsistemas estén operando para producir. Fallan y se reparan de forma independiente entre sí. La unidad de lavado (B) tiene una máquina principal y una de respaldo: mientras la principal funciona, la de respaldo permanece apagada; si la principal falla, la de respaldo entra a operar de inmediato (en capacidad reducida) mientras se repara la principal; si la de respaldo también falla antes de que la principal quede reparada, el subsistema queda completamente fuera de servicio. La unidad de llenado (C) es una sola máquina, sin respaldo: simplemente está operando o fallada. Una unidad reparada queda como nueva.

Datos / parámetros

Unidad de lavado (B)

- $\lambda_1 = 0.02$ fallas/día — vida media de la unidad principal: 50 días.
- $\lambda_2 = 0.05$ fallas/día — vida media de la unidad de respaldo bajo uso: 20 días.
- $\mu_1 = 1$ reparación/día — tiempo medio de reparación de la principal: 1 día.
- $\mu_2 = 0.5$ reparaciones/día — tiempo medio de reparación cuando ambas fallaron: 2 días.

Unidad de llenado (C):

- $\lambda_C = 0.03$ fallas/día — vida media: 33.3 días.
- $\mu_C = 0.8$ reparaciones/día — tiempo medio de reparación: 1.25 días.

Ejercicio 2. Fachada de edificio

Fuente

Zbiciak, A., Walasek, D., Bagdasaryan, V., & Koda, E. (2026). "Continuous-Time Markov Chain Modelling for Service Life Prediction of Building Elements". *Applied Sciences*, 16(7), 3555.

Contexto paper

Predicción de la vida útil de elementos de construcción (fachadas, cubiertas, instalaciones) mediante una CTMC con un estado absorbente que representa la falla, comparando un generador homogéneo, uno variante en el tiempo y uno fraccional. Usa datos reales de inspección de dos hoteles (10 y 6 pisos) tomados en 2020 y 2025, clasificando cada elemento en 4 estados de condición.

Descripción del sistema

Un equipo de inspección clasifica la fachada de un edificio, cada cierto tiempo, en uno de 4 estados de condición. El deterioro es monótono: la fachada nunca mejora por sí sola, solo avanza al siguiente estado de desgaste. El estado "malo" es terminal: implica reemplazo.

Datos / parámetros

- Permanencia media en estado 1: 8 años.
- Permanencia media en estado 2: 10 años.
- Permanencia media en estado 3: 12 años.

