

Modelado de CMTC

Juliana Quintana-Rojas

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

Espacio de Estados (S)

Es el conjunto contable de todos los valores numéricos o situaciones posibles que puede tomar la variable aleatoria $\mathbf{X(t)}$ que describe el estado del sistema en cualquier instante continuo de tiempo $t \geq 0$

$$S = \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \infty \text{ infinito estados}$$

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\} \rightarrow \text{finito estados}$$

Importancia

Define la dimensión del sistema y el tamaño de los vectores de estado y de la matriz generadora $\mathbf{Q}$

$\mathbf{1}(\alpha)$

Vector de condiciones iniciales (α)

Es un vector fila de probabilidades

$\alpha = [\alpha_i]_{i \in S}$ que especifica la distribución de probabilidad de que el sistema se encuentre en cada uno de los estados posibles al instante inicial $t = 0$

$$\alpha_i = P(X(0) = i), \quad \forall i \in S$$

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\} \rightarrow \alpha = [0, 0, 1, 0, \dots, 0]$$

Norma estocástica

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \mid \alpha_i \geq 0$$

→ Si se conoce con certeza que el sistema arranca en un estado específico k , la condición inicial es un vector unitario (un 1 en la posición k y 0 en las demás)

Importancia

Determina el punto de partida del análisis estocástico y es indispensable para evaluar la solución de la distribución transitoria

Vector de Probabilidades de Estado / Distribución Transitoria ($p(t)$)

Es el vector fila $p(t) = [p_j(t)]_{j \in S}$ que representa la distribución marginal de probabilidad del estado del sistema en un instante continuo futuro $t > 0$

$$p_j(t) = P(X(t)=j), \forall j \in S$$

$$p_j(t) = \sum_{i \in S} a_i p_{i,j}(t) \Rightarrow p(t) = a P(t) = a e^{At}$$

$$p_{i,j}(t) = P(X(t)=j | X(0)=i)$$

Prob. transición de estado i al estado j al cabo de la duración t

Importancia

Define la dimensión del sistema y el tamaño de los vectores de estado y de la matriz generadora Q

Distribución Estacionaria o de Equilibrio (π)

Es el vector de probabilidades límite de largo plazo $\pi(t) = [\pi_j(t)]_{j \in S}$ hacia el cual convergen las probabilidades de estado a medida que $t \rightarrow \infty$, independientemente de la condición inicial (si la cadena es irreducible y positiva recurrente)

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t)=j | X(0)=i)$$

Propiedad Invarianza $\rightarrow$ Dist. inicial es la estacionaria $p(0) = \pi$

$\hookrightarrow$ Prob. permanece idéntica en todo el tiempo $t \geq 0$ $p(t) = \pi$

ECUACIÓN resolviendo el sistema lineal algebraico balance
 CALCULO : global

$$\pi Q = 0 \text{ sujeto a } \sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

Cadena irreducible

Es posible pasar desde cualquier estado i hasta cualquier otro estado j en un número finito de pasos (o en un tiempo finito)

- El sistema puede navegar por todo el espacio de estados

Recurrencia

Recurrencia:

La probabilidad de regresar a él en algún momento futuro (habiendo partido de él) es exactamente igual a 1

$$\tilde{u}_i = 1$$

Positiva Recurrencia:

El tiempo promedio esperado de primer retorno a ese estado es estrictamente finito

$$\tilde{m}_i = E[\tilde{T}_i | X_0 = i]$$
$$\tilde{m}_i < \infty$$

Nula Recurrencia:

La probabilidad de retornar también es **1**, pero el tiempo medio esperado de retorno es infinito

$$\tilde{m}_i = \infty$$

PROPIEDAD EN CADENAS FINITAS: CUALQUIER CADENA DE MARKOV IRREDUCIBLE QUE TENGA UN NÚMERO FINITO DE ESTADOS ES SIEMPRE POSITIVAMENTE RECURRENTE

Irreducible + Positivamente Recurrente: El sistema visitará todos y cada uno de sus estados infinitas veces en el largo plazo, y el tiempo promedio que tarda en regresar a cualquier estado siempre es finito

Ejercicio 1. Planta embotelladora

Fuente

Gayathri, M. (2025). "A Continuous-Time Markov Chain Approach for Availability Analysis of a Repairable Engineering System". *International Journal for Multidisciplinary Research*

Contexto paper

Se modela una planta embotelladora completa (8 subsistemas: alimentación de botellas, lavado, llenado, tapado, etiquetado, inspección, empaque y transportador) como una CTMC de 32 estados, y usa las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov hacia adelante para obtener la disponibilidad del sistema.

Simplificación para la clase: se aísla un solo subsistema, la Unidad de Lavado, que tiene una unidad principal operando y una unidad de respaldo en espera fría (cold standby). Este subsistema captura la idea central del paper (redundancia + reparación) sin la complejidad de 32 estados.

Descripción del sistema

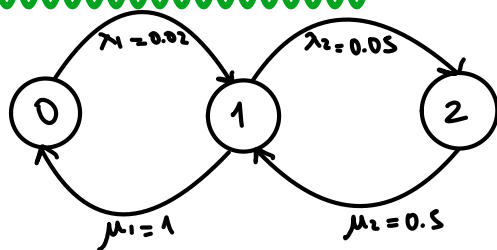
Una planta embotelladora tiene una unidad de lavado con una máquina principal y una de respaldo. Mientras la principal funciona, la de respaldo permanece apagada. Si la principal falla, la de respaldo entra a operar de inmediato (en capacidad reducida) mientras se repara la principal. Si la de respaldo también falla antes de que la principal quede reparada, el subsistema queda completamente fuera de servicio. Una unidad reparada queda como nueva.

Datos / parámetros

- $\lambda_1 = 0.02$ fallas/día — vida media de la unidad principal: 50 días.
- $\lambda_2 = 0.05$ fallas/día — vida media de la unidad de respaldo bajo uso: 20 días.
- $\mu_1 = 1$ reparación/día — tiempo medio de reparación de la principal: 1 día
- $\mu_2 = 0.5$ reparaciones/día — tiempo medio de reparación cuando ambas fallaron: 2 días.

1. Variable estado: Condición de la und lavado en t (días)
2. Espacio estados: $S = \{0, 1, 2\}$ 0: Normal | 1: Capacidad reducida | 2: Falla total
3. Vector condiciones iniciales: $\alpha = [1, 0, 0]$ | Empieza estado normal

4. Gráfico de tasas



5. Tasas de transición

$$\begin{aligned}
 q_{0,1} &= \lambda_1 = 0.02 & q_0 &= \lambda_1 = 0.02 \\
 q_{1,2} &= \lambda_2 = 0.05 & q_1 &= \lambda_2 + \mu_1 = 0.05 + 1 = 1.05 \\
 q_{2,1} &= \mu_2 = 0.5 & q_2 &= \mu_2 = 0.5 \\
 q_{1,0} &= \mu_1 = 1 & & \\
 q_{1,1} &= -q_1 = -(\lambda_2 + \mu_1) = -1.05 & & \\
 q_{2,2} &= -q_2 = -\mu_2 = -0.5 & & \\
 q_{0,0} &= -q_0 = -\lambda_1 = -0.02 & &
 \end{aligned}$$

6. Matriz Generadora

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 & 0 \\ 1 & -1.05 & 0.05 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

7. Tiempos Permanencia

$$\begin{aligned}
 E[Y_0] &= 1/q_0 = 1/0.02 && \text{50 días} \\
 E[Y_1] &= 1/q_1 = 1/1.05 && \text{0.95 días} \\
 E[Y_2] &= 1/q_2 = 1/0.5 && \text{2 días}
 \end{aligned}$$

8. Probabilidad cadena embebida ($P_{ij} = q_{ij}/q_i$)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.02}{1.05} & 0 \\ 1/1.05 & 0 & \frac{0.05}{1.05} \\ 0 & \frac{0.5}{0.5} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0.048 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Distribución Estacionaria

$$\pi Q = 0 \quad \text{Sujeto a } \sum \pi_i = 1$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 & 0 \\ 1 & -1.05 & 0.05 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2]$$

$$\text{Col (0)} \quad -0.02\pi_0 + 1(\pi_1) + 0(\pi_2) = 0 \rightarrow \pi_1 = 0.02\pi_0$$

$$\text{Col (1)} \quad 0.02\pi_0 - 1.05\pi_1 + 0.5\pi_2 = 0 \rightarrow 0.02\pi_0 - 1.05\pi_1 + 0.5\pi_2 = 0$$

$$\text{Col (2)} \quad 0(\pi_0) + 0.05\pi_1 - 0.5\pi_2 = 0 \rightarrow 0.05\pi_1 = 0.5\pi_2$$

$$\text{Ad. } \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\pi_2 = \frac{0.05}{0.5} \pi_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 0.02\pi_0 \\ \pi_2 = \frac{0.05}{0.5} (0.02\pi_0) \\ \pi_0 + 0.02\pi_0 + \frac{0.05}{0.5} (0.02\pi_0) = 1 \\ 1.022\pi_0 = 1 \\ \pi_0 = 0.978 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \pi_1 = 0.02(0.978) = 0.01956 \\ \pi_2 = \frac{0.05}{0.5} \pi_1 = 0.001956 \end{array}$$

$$\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2] = [0.978, 0.01956, 0.001956]$$

10. Disponibilidad

→ Sistemas reparables (falla/operativo)

$$A_v(t) = P(\text{sistema operando } t) = \sum_{i \in \text{Sistema}} \pi_i(t) = \pi_0 + \pi_1 = 0.978 + 0.01956$$

$$A_v(t) = 0.9976$$

Ejercicio 1. Planta embotelladora - Subsistemas de lavado (B) y llenado (C)

Fuente

Gayathri, M. (2025). "A Continuous-Time Markov Chain Approach for Availability Analysis of a Repairable Engineering System". *International Journal for Multidisciplinary Research*

Contexto paper

Se modela una planta embotelladora completa (8 subsistemas: alimentación de botellas, lavado, llenado, tapado, etiquetado, inspección, empaque y transportador) como una CTMC de 32 estados, y usa las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov hacia adelante para obtener la disponibilidad del sistema.

Extensión para la clase: en vez de aislar un solo subsistema, aquí se combinan dos: lavado (B) y llenado (C), para mostrar cómo el modelo completo de 32 estados del paper se construye realmente: combinando las variables de estado de cada subsistema.

Descripción del sistema

La línea de la planta necesita que ambos subsistemas estén operando para producir. Fallan y se reparan de forma independiente entre sí. La unidad de lavado (B) tiene una máquina principal y una de respaldo: mientras la principal funciona, la de respaldo permanece apagada; si la principal falla, la de respaldo entra a operar de inmediato (en capacidad reducida) mientras se repara la principal; si la de respaldo también falla antes de que la principal quede reparada, el subsistema queda completamente fuera de servicio. La unidad de llenado (C) es una sola máquina, sin respaldo: simplemente está operando o fallada. Una unidad reparada queda como nueva.

Datos / parámetros

Unidad de lavado (B)

- $\lambda_1 = 0.02$ fallas/día — vida media de la unidad principal: 50 días.
- $\lambda_2 = 0.05$ fallas/día — vida media de la unidad de respaldo bajo uso: 20 días.
- $\mu_1 = 1$ reparación/día — tiempo medio de reparación de la principal: 1 día.
- $\mu_2 = 0.5$ reparaciones/día — tiempo medio de reparación cuando ambas fallaron: 2 días.

Unidad de llenado (C):

- $\lambda_C = 0.03$ fallas/día — vida media: 33.3 días.
- $\mu_C = 0.8$ reparaciones/día — tiempo medio de reparación: 1.25 días.

1. Variables de estado

$X_1(t) \rightarrow$ Condición de la vnd lavado t (días)
 $X_2(t) \rightarrow$ Condición de la vnd llenado t (días)

2. Espacio de estados

$S_1 = \{0, 1, 2\}$ 0: Operativa
1: Capacidad reducida
2: Falla
 x

$S_2 = \{0, 1\}$ 0: Operativa
1: Falla

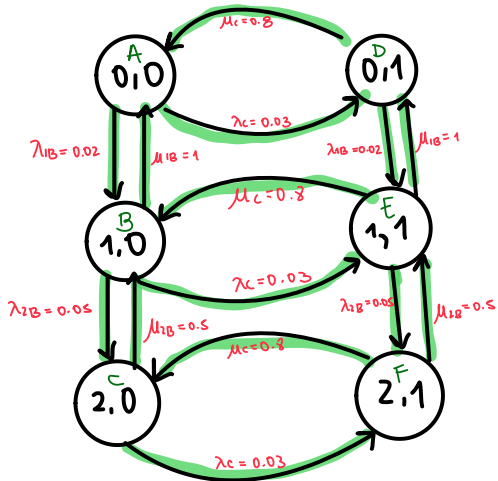
$\rightarrow 6 \text{ estados} = S_1 \times S_2 = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$

$(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1)$
Operativas
ambas

3. Vector (condiciones iniciales)

$\alpha = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$

4. Gráfico tasas



$q_{F,E} = \mu_{2B} = 0.5$

$q_{F,C} = \mu_1 = 0.8$

$P_{F,E} = 0.389$
 $P_{F,C} = 0.615$

$q_F = 1.3$

$q_{F,F} = -1.3$

5. Tasas transición

$q_{A,D} = \lambda_C = 0.03$

$q_{A,B} = \lambda_B = 0.02$

$q_{B,A} = \mu_B = 1$

$q_{B,E} = \lambda_C = 0.03$

$q_{B,C} = \lambda_{2B} = 0.05$

$q_{C,B} = \mu_{1B} = 0.5$

$q_{C,F} = \lambda_C = 0.03$

$q_{D,A} = \mu_C = 0.8$

$q_{D,E} = \lambda_{1B} = 0.02$

$q_{E,D} = \mu_{1B} = 1$

$q_{E,B} = \mu_C = 0.8$

$q_{E,F} = \lambda_{2B} = 0.05$

$q_A = 0.05$

$q_{AA} = -0.05$

$q_B = 1.08$

$q_{B,B} = -1.08$

$q_C = 0.53$

$q_{C,C} = -0.53$

$q_D = 0.82$

$q_{D,D} = -0.82$

$q_E = 1.85$

$q_{EE} = -1.85$

$P_{A,D} = 0.6$
 $P_{A,B} = 0.4$

$P_{B,A} = 0.926$
 $P_{B,E} = 0.027$
 $P_{B,C} = 0.046$

$P_{C,B} = 0.94$
 $P_{C,C} = 0.056$

$P_{D,A} = 0.966$
 $P_{D,E} = 0.024$

$P_{E,D} = 0.54$
 $P_{E,B} = 0.43$
 $P_{E,F} = 0.027$

6. Matriz generadora

$P_{ij} = q_{ij}/q_i$

$Q = Q_B \cdot I_C + I_B \cdot Q_C$

	A	D	B	E	C	F
A	-0.05	0.03	0.02	0	0	0
D	0.8	-0.82	0	0.02	0	0
B	1	0	-1.08	0.03	0.05	0
E	0	1	0.8	-1.85	0	0.05
C	0	0	0.5	0	-0.53	0.03
F	0	0	0	0.5	0.8	-1.3

7. Tiempos de permanencia

$$E[Y_A] = 1/q_A = 20 \text{ días}$$

$$E[Y_B] = 1/q_B = 0.925 \text{ días}$$

$$E[Y_C] = 1/q_C = 1.87 \text{ días}$$

$$E[Y_D] = 1/q_D = 121 \text{ días}$$

$$E[Y_E] = 1/q_E = 0.54 \text{ días}$$

$$E[Y_F] = 1/q_F = 0.77 \text{ días}$$

8. Probabilidad Cadena embebida

	A	D	B	E	C	F
A	0	0.6	0.4	0	0	0
D	0.966	0	0	0.024	0	0
B	0.926	0	0	0.027	0.046	0
E	0	0.54	0.43	0	0	0.027
C	0	0	0.944	0	0	0.056
F	0	0	0	0.384	0.615	0

10. Disponibilidad

$$Av_{conjunta} = P(X_1 \neq 2, X_2 \neq 1)$$

$$Av_{conjunta} = \underbrace{\pi_A + \pi_B}_{\text{tuplos operativos}} = 0.9431 + 0.0189$$

$$Av_{con} = 0.962$$

9. Distribución Estacionaria

$$Q = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 & 0.02 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.82 & 0 & 0.02 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1.08 & 0.03 & 0.05 & 0 \\ 0 & 1 & 0.8 & -1.85 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.53 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.8 & -1.3 \end{bmatrix} \quad [\pi_A \quad \pi_D \quad \pi_B \quad \pi_E \quad \pi_C \quad \pi_F]$$

$$\text{ColA: } -0.05\pi_A + 0.8\pi_D = 0$$

$$\text{ColD: } 0.03\pi_A - 0.82\pi_D + \pi_E = 0$$

$$\text{ColB: } 0.02\pi_A - 1.08\pi_B + 0.8\pi_E + 0.5\pi_C = 0$$

$$\text{ColE: } 0.02\pi_D + 0.03\pi_B - 1.85\pi_E + 0.5\pi_F = 0$$

$$\text{ColC: } 0.05\pi_B - 0.53\pi_C + 0.8\pi_F = 0$$

$$\text{ColF: } 0.05\pi_E + 0.03\pi_C - 1.3\pi_F = 0$$

$$\pi_A + \pi_D + \pi_B + \pi_E + \pi_C + \pi_F = 1$$

$$\begin{aligned} \pi_A &= 0.9431 \\ \pi_B &= 0.0189 \\ \pi_C &= 0.0019 \\ \pi_D &= 0.0354 \\ \pi_E &= 0.0007 \\ \pi_F &= 0.00007 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Fachada de edificio

Fuente

Zbiciak, A., Walasek, D., Bagdasaryan, V., & Koda, E. (2026). "Continuous-Time Markov Chain Modelling for Service Life Prediction of Building Elements". *Applied Sciences*, 16(7), 3555.

Contexto paper

Predicción de la vida útil de elementos de construcción (fachadas, cubiertas, instalaciones) mediante una CTMC con un estado absorbente que representa la falla, comparando un generador homogéneo, uno variante en el tiempo y uno fraccional. Usa datos reales de inspección de dos hoteles (10 y 6 pisos) tomados en 2020 y 2025, clasificando cada elemento en 4 estados de condición.

Descripción del sistema

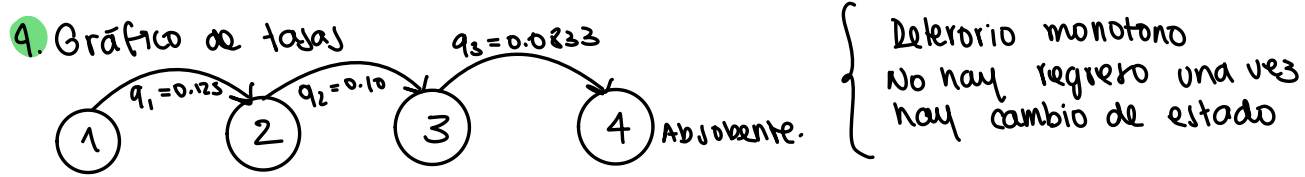
Un equipo de inspección clasifica la fachada de un edificio, cada cierto tiempo, en uno de 4 estados de condición. El deterioro es monótono: la fachada nunca mejora por sí sola, solo avanza al siguiente estado de desgaste. El estado "malo" es terminal: implica reemplazo.

Datos / parámetros

- Permanencia media en estado 1: 8 años.
- Permanencia media en estado 2: 10 años.
- Permanencia media en estado 3: 12 años.

- Variable de estado: condición de la fachada en t (años)
- Espacio de estados: $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 1: Muy Bueno | 2: Medio | 3: Satisfactorio | 4: Malo, crítico (Absorbente)

- Vector condiciones iniciales
 $\alpha = [1, 0, 0, 0] \rightarrow$ Fachada Nueva



- Tasas transición

$$\begin{array}{l|l}
 q_{12} = 0.125 & q_1 = 0.125 \\
 q_{23} = 0.10 & q_2 = 0.10 \\
 q_{34} = 0.0833 & q_3 = 0.083
 \end{array}$$

- Matriz Generadora

$$Q = \begin{bmatrix} -0.125 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.10 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & -0.083 & 0.083 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tiempos permanencia

$$E[Y_1] = 1/q_1 = 8 \text{ años}$$

$$E[Y_2] = 1/q_2 = 10 \text{ años}$$

$$E[Y_3] = 1/q_3 = 12 \text{ años}$$

$$E[Y_4] = 1/q_4 = 1/0 = \infty \text{ (absorbente)}$$

- Probabilidad cadena embebida

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} p_{12} = 1 \\ p_{23} = 1 \\ p_{34} = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{No hay} \\ \text{complejidad} \end{array} \right.$$

IIND 2502

- Distribución Estacionaria

$$Q = \begin{bmatrix} -0.125 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.10 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & -0.083 & 0.083 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]$$

Transitorio

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

NO se pueden ver $\pi \rightarrow \infty$

$\pi_2 + \pi_3 = 1 \rightarrow ?$ No se cumple

$$\pi = (0, 0, 0, 1)$$

$$\text{Col 1: } -0.125\pi_1 = 0$$

$$\text{Col 2: } 0.125\pi_1 - 0.10\pi_2 = 0$$

$$\text{Col 3: } 0.10\pi_2 - 0.083\pi_3 = 0$$

$$\text{Col 4: } 0.083\pi_4 = 0$$

$$\pi_1 = \pi_4 = 0$$

Distribución de generada
(No se puede volver a un estado anterior)

MÓDULO 2

MOBI 202620

Se puede identificar para un tiempo $t = \text{def.} \approx$ Función de supervivencia
 $t = 80$ años

$$\pi(80) = \alpha \cdot e^{Q \cdot t} = (1, 0, 0, 0) \cdot e^{Q \cdot 80}$$

$$e^{Q \cdot t} = V \cdot e^{\Lambda t} V^{-1} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Matriz eigenvectores} \\ \text{matriz} \\ \text{eigenvectores} \end{array} \right. \text{ diagonalización}$$

↳ Ecu. Kolmogorov
 * siguiente clase *

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_1}{dt} &= -q_1 \pi_1 \rightarrow \pi_1(t) = e^{-q_1 t} \\ \frac{d\pi_2}{dt} &= q_1 \pi_1(t) - q_2 \pi_2 = q_1 e^{-q_1 t} - q_2 \pi_2 \\ \pi_2(t) &= \frac{q_1}{q_2 - q_1} (e^{-q_1 t} - e^{-q_2 t}) \end{aligned}$$

$$\pi_3(t) = \frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1} \left[\frac{e^{-q_1 t}}{q_3 - q_1} - \frac{e^{-q_2 t}}{q_3 - q_2} \right] + C e^{-q_3 t}$$

$$C = -\frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1} \left[\frac{1}{q_3 - q_1} - \frac{1}{q_3 - q_2} \right]$$

$$\pi_4(t) = 1 - \pi_1(t) - \pi_2(t) - \pi_3(t)$$

$$\pi(80) = (0.00004, 0.001450, 0.013388, \underline{0.985116})$$

Esta casi en el
estado absorbente

