

Análisis transitorio de CMTC

Juliana Quintana-Rojas

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

Obj. Estudia la evolución dinámico-probabilística de un sistema en un horizonte de tiempo finito o específico $t \geq 0$, evaluando cómo cambian las probabilidades de estado antes de alcanzar el equilibrio estacionario o de largo plazo

Definición

Consiste en determinar el vector de probabilidades de estado representa la probabilidad marginal de que el sistema se encuentre en el estado j al tiempo t

El pilar matemático fundamental para llevar a cabo este análisis son las
**Ecuaciones
Diferenciales de
Kolmogorov**

Ecuaciones diferenciales de Kolmogorov

Las ecuaciones de Kolmogorov se derivan al combinar la **Propiedad de Markov** y las **Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov** en tiempo continuo con la **matriz generadora**

Ecuaciones hacia atrás

Conceptos Clave

- Matriz generadora
- Conmutatividad de Matrices de Transición
→ propiedad algebraica única de las CMTC
- Exponencial Matricial → solución analítica

Ecuaciones hacia adelante

Ej. Máquina de 2 Estados

Ejercicio 1. Planta embotelladora

Fuente

Gayathri, M. (2025). "A Continuous-Time Markov Chain Approach for Availability Analysis of a Repairable Engineering System". *International Journal for Multidisciplinary Research*

Contexto paper

Se modela una planta embotelladora completa (8 subsistemas: alimentación de botellas, lavado, llenado, tapado, etiquetado, inspección, empaque y transportador) como una CTMC de 32 estados, y usa las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov hacia adelante para obtener la disponibilidad del sistema.

Simplificación para la clase: se aísla un solo subsistema, la Unidad de Lavado, que tiene una unidad principal operando y una unidad de respaldo en espera fría (cold standby). Este subsistema captura la idea central del paper (redundancia + reparación) sin la complejidad de 32 estados.

Descripción del sistema

Una planta embotelladora tiene una unidad de lavado con una máquina principal y una de respaldo. Mientras la principal funciona, la de respaldo permanece apagada. Si la principal falla, la de respaldo entra a operar de inmediato (en capacidad reducida) mientras se repara la principal. Si la de respaldo también falla antes de que la principal quede reparada, el subsistema queda completamente fuera de servicio. Una unidad reparada queda como nueva.

Datos / parámetros

- $\lambda_1 = 0.02$ fallas/día — vida media de la unidad principal: 50 días.
- $\lambda_2 = 0.05$ fallas/día — vida media de la unidad de respaldo bajo uso: 20 días.
- $\mu_1 = 1$ reparación/día — tiempo medio de reparación de la principal: 1 día
- $\mu_2 = 0.5$ reparaciones/día — tiempo medio de reparación cuando ambas fallaron: 2 días.

Ejercicio 1. Planta embotelladora - Subsistemas de lavado (B) y llenado (C)

Fuente

Gayathri, M. (2025). "A Continuous-Time Markov Chain Approach for Availability Analysis of a Repairable Engineering System". *International Journal for Multidisciplinary Research*

Contexto paper

Se modela una planta embotelladora completa (8 subsistemas: alimentación de botellas, lavado, llenado, tapado, etiquetado, inspección, empaque y transportador) como una CTMC de 32 estados, y usa las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov hacia adelante para obtener la disponibilidad del sistema.

Extensión para la clase: en vez de aislar un solo subsistema, aquí se combinan dos: lavado (B) y llenado (C), para mostrar cómo el modelo completo de 32 estados del paper se construye realmente: combinando las variables de estado de cada subsistema.

Descripción del sistema

La línea de la planta necesita que ambos subsistemas estén operando para producir. Fallan y se reparan de forma independiente entre sí. La unidad de lavado (B) tiene una máquina principal y una de respaldo: mientras la principal funciona, la de respaldo permanece apagada; si la principal falla, la de respaldo entra a operar de inmediato (en capacidad reducida) mientras se repara la principal; si la de respaldo también falla antes de que la principal quede reparada, el subsistema queda completamente fuera de servicio. La unidad de llenado (C) es una sola máquina, sin respaldo: simplemente está operando o fallada. Una unidad reparada queda como nueva.

Datos / parámetros

Unidad de lavado (B)

- $\lambda_1 = 0.02$ fallas/día — vida media de la unidad principal: 50 días.
- $\lambda_2 = 0.05$ fallas/día — vida media de la unidad de respaldo bajo uso: 20 días.
- $\mu_1 = 1$ reparación/día — tiempo medio de reparación de la principal: 1 día.
- $\mu_2 = 0.5$ reparaciones/día — tiempo medio de reparación cuando ambas fallaron: 2 días.

Unidad de llenado (C):

- $\lambda_C = 0.03$ fallas/día — vida media: 33.3 días.
- $\mu_C = 0.8$ reparaciones/día — tiempo medio de reparación: 1.25 días.

Ejercicio 2. Fachada de edificio

Fuente

Zbiciak, A., Walasek, D., Bagdasaryan, V., & Koda, E. (2026). "Continuous-Time Markov Chain Modelling for Service Life Prediction of Building Elements". *Applied Sciences*, 16(7), 3555.

Contexto paper

Predicción de la vida útil de elementos de construcción (fachadas, cubiertas, instalaciones) mediante una CTMC con un estado absorbente que representa la falla, comparando un generador homogéneo, uno variante en el tiempo y uno fraccional. Usa datos reales de inspección de dos hoteles (10 y 6 pisos) tomados en 2020 y 2025, clasificando cada elemento en 4 estados de condición.

Descripción del sistema

Un equipo de inspección clasifica la fachada de un edificio, cada cierto tiempo, en uno de 4 estados de condición. El deterioro es monótono: la fachada nunca mejora por sí sola, solo avanza al siguiente estado de desgaste. El estado "malo" es terminal: implica reemplazo.

Datos / parámetros

- Permanencia media en estado 1: 8 años.
- Permanencia media en estado 2: 10 años.
- Permanencia media en estado 3: 12 años.

Ejercicio 3. Portafolio financiero

Fuente

Optimal control of multiple Markov switching stochastic system with application to portfolio decision

Contexto paper

Se modela a un inversionista que enfrenta un mercado financiero y un mercado laboral, cada uno gobernado por su propia cadena de Markov de cambio de régimen. El paper combina las dos cadenas independientes en una sola cadena conjunta de 4 estados y deriva explícitamente su matriz generadora combinada. Para la clase, el foco es usar esa cadena conjunta para calcular $\pi(t)$: la probabilidad de cada combinación de régimen en cualquier horizonte de inversión.

Descripción del sistema

El mercado financiero alterna entre régimen Alcista y Bajista; el mercado laboral alterna entre Expansión y Recesión. Ambos cambian de forma continua e independiente. El estado del sistema es el par (régimen financiero, régimen laboral).

Datos / parámetros

Mercado financiero

- Alcista: duración media 4 años
- Bajista: duración media 1.5 años.

Mercado laboral

- Expansión: duración media 6 años
- Recesión: duración media 2 años.

Ejercicio 4. Genética

Fuente

Radulescu, O. et al. (2024). "Identifying Markov chain models from time-to-event data: an algebraic approach"

Contexto paper

Se modela la expresión génica como una CTMC: el promotor de un gen alterna entre configuraciones no observables hasta alcanzar una configuración desde la que puede dispararse una ráfaga de transcripción (evento observable). El tiempo entre observaciones sigue una distribución phase-type, la distribución del tiempo hasta la absorción en esa CTMC. Para la clase, el foco es usar $\pi(t)$ para calcular la probabilidad de que aún no haya ocurrido la ráfaga en cualquier instante.

Descripción del sistema

El gen promotor puede estar en dos configuraciones cerradas (A o B) o en una configuración abierta/poised, desde la cual puede regresar a cualquiera de las dos cerradas o disparar la ráfaga. Una vez ocurre la ráfaga, se trata como el evento observado (absorbente, para este análisis).

Datos / parámetros

- $k_1 = 0.05$ / min (cierre A→abierto)
- $k_2 = 0.08$ / min (cierre B→abierto)
- $k_3 = 0.02$ / min (abierto→A)
- $k_4 = 0.03$ / min (abierto→B)
- $k_5 = 0.5$ / min (abierto→ráfaga)

