

Modelado de CMTC

Juliana Quintana-Rojas

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

Estado recurrente

Un estado $i \in S$ es recurrente si, habiendo partido de él, la probabilidad de que el sistema regrese al estado i en algún tiempo finito es exactamente igual a **1**

Positiva Recurrencia

El tiempo promedio esperado de primer retorno a ese estado es estrictamente finito

Nula Recurrencia

La probabilidad de retornar también es **1**, pero el tiempo medio esperado de retorno es infinito

Cadena irreducible

Es posible pasar desde cualquier estado i hasta cualquier otro estado j en un número finito de pasos (o en un tiempo finito)

- El sistema puede navegar por todo el espacio de estados

Irreducible + Positivamente Recurrente: El sistema visitará todos y cada uno de sus estados infinitas veces en el largo plazo, y el tiempo promedio que tarda en regresar a cualquier estado siempre es finito

PROPIEDAD EN CADENAS FINITAS:
CUALQUIER CADENA DE MARKOV
IRREDUCIBLE QUE TENGA UN
NÚMERO FINITO DE ESTADOS ES
**SIEMPRE POSITIVAMENTE
RECURRENTE**

Estado Transitorio

Un estado $i \in S$ es transitorio si existe una probabilidad estrictamente positiva de que el sistema abandone el estado i y nunca regrese a él, **la probabilidad de retorno < 1**

Estado Absorbente

Es un estado i del cual no se puede salir una vez alcanzado. Todo estado absorbente es recurrente

Propiedades y características

Propiedad de Clase

La recurrencia y la transitoriedad son propiedades comunicantes; todos los estados dentro de una misma clase comunicante irreducible comparten la misma clasificación

Tiempo de Ocupación Infinito vs. Finito

El tiempo total esperado que el sistema permanece en un estado transitorio a lo largo de un horizonte infinito es estrictamente finito. En consecuencia, para un estado transitorio j :

Cadenas Finitas

En una CMTC con espacio de estados finito S , es imposible que todos los estados **sean transitorios; al menos un estado debe ser recurrente positivo.**

Dada la matriz generadora $\mathbf{Q}$ con espacio de estados $S = \{0,1,2,3\}$

1. Identificar estados absorbentes
2. Analizar la conectividad
3. Realizar la clasificación del estado

Def. Una CMTC $\{X(t), t \geq 0\}$, es ergódica si es irreducible (todos los estados se comunican entre sí directa o indirectamente) y todos sus estados son recurrentes positivos

Propiedades y características

Independencia del Estado Inicial

En una cadena ergódica, la probabilidad de encontrarse en el estado j en el largo plazo no depende de cuál haya sido el estado inicial $X(0) = i$

Caso Finito

Si una CMTC tiene un espacio de estados finito y es irreducible, entonces es automáticamente **recurrente positiva y, por lo tanto, ergódica**

Eq. Balance global

Ecuación de normalización

Determinar si la siguiente CMTc con espacio de estados $S = \{0, 1, 2\}$ es ergódica:

Estado Estable (Distribución Estacionaria)

El estado estable (o distribución de equilibrio/límite) es el vector de probabilidades de estado $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N]$ al que converge el sistema a largo plazo $t \rightarrow \infty$

Propiedades y características

Tasa de Entrada = Tasa de Salida

La tasa a la que el sistema entra al estado j desde otros estados equivale a la tasa a la que abandona dicho estado (Ecuaciones de balance global)

Invariancia Temporal

Si la condición inicial del sistema coincide con la distribución estacionaria $p(0) = \pi$, la distribución marginal se mantiene constante para todo $t \geq 0$ ($p(t) = \pi$)

Ecuación Estado estable

Para un sistema de 2 estados

Ejemplo: Calculo del estado estable

Para un servidor de red con tasa de falla $\lambda = 2$ fallas/día y tasa de reparación $\mu = 3$ reparaciones/día, con espacio de estados $S = \{0:\text{Operativo}, 1:\text{En Reparación}\}$ y matriz generadora:

Análisis Transitorio en Tiempo Continuo y Costos

Análisis Transitorio

Evalúa el vector de probabilidades de estado para un horizonte finito $t \geq 0$, condicionado al vector de estado inicial $\alpha = p(0)$

Análisis Transitorio

Asignan una estructura económica al sistema mediante un vector de costos continuos por unidad de tiempo según el estado ocupado

Propiedades y características

Dinámica transitoria

Costo total esperado acumulado en $[0, T]$

Costo promedio a largo plazo (g)

Considerando el servidor del ejemplo anterior:

- Cuando está operativo (Estado 0), genera un costo operativo de $c(0) = 10/\text{hora}$.
- Cuando está averiado (Estado 1), genera un costo por pérdida de servicio y reparación de $c(1) = 50/\text{hora}$

Calcular el costo promedio por hora del servidor a largo plazo (g).

Tiempos de Ocupación

El tiempo esperado de ocupación $m_{ij}(T)$ es la cantidad esperada de tiempo que la CMTC permanece en el estado j durante el intervalo de tiempo $[0, T]$, dado que inició en el estado i al tiempo $t = 0$

Propiedades y características

Matriz de Tiempos de Ocupación $M(T)$

Relación con el Estado Estable

Para un sistema de 2 estados con el siguiente Q , se sabe analíticamente que iniciando en el estado 0 ($X(0) = 0$), la probabilidad de estar en 0 al tiempo t es:

Tiempos de primera vista

Es la variable aleatoria que mide el tiempo hasta que la CMTC toca por primera vez el estado objetivo j

Su valor esperado partiendo del estado i se denota por:

Propiedades y características

Condición de Frontera

Si el sistema ya está en el estado objetivo j , el tiempo para alcanzar j por primera vez es nulo: $m_{j,j} = 0$

Ecuación de Primer Paso

Expresa que el tiempo medio equivale al tiempo de permanencia esperado en el estado inicial $1/q_i$ más el tiempo esperado restante ponderado por el siguiente estado alcanzado

Ecuación de Primer Paso

Si $\bar{Q}$ es la submatriz obtenida al eliminar la fila y columna del estado objetivo J en Q , el vector de tiempos medios m satisface:

Ejemplo: Tiempo Medio de Primera Visita

Dada la matriz generadora Q con espacio de estados $S = \{0, 1, 2\}$

- Calcular los tiempos medios de primera visita al estado 0 partiendo desde el estado 1 ($m_{1,0}$) y desde el estado 2 ($m_{2,0}$)